Μάθημα 11ο: Ανάλυση 2: Δοδός:

▷ **Θεώρημα:** Αν X είναι διαχωρίσιμος τότε: (B_{X^*}, w^*) είναι μετρικοποιήσιμος.

- **Απόδειξη:** Όμοια με την αντίστοιχη απόδειξη για τις ασθενείς τοπολογίες

Αυτοπαθείς Χώροι Banach:

- **Ορισμός:** Έστω X είναι χώρος Banach. Τότε αυτός καλείται αυτοπαθής αν έχουμε ότι: $\hat{X} = X^{**}$, δηλαδή η $\wedge$ είναι επί.

▷ **Παρατήρηση:** Αν ο X είναι αυτοπαθής τότε ο X είναι ισομετρικός με τον X^{**} και το αντίστροφο δεν ισχύει και αντιπαράδειγμα είναι ο James.

- **Θεώρημα James:** Έστω X χώρος Banach. Τότε τα παρακάτω είναι ισοδύναμα.

1. Ο X είναι αυτοπαθής
2. $(\overline{B}_X, w)$ είναι συμπαγής
3. Για κάθε $x^* \in X^*$: $\exists x \in X: \|x\| = 1$ με: $x^*(x) = \|x\| = 1$

- **Πρόταση:** Αν X είναι ένας αυτοπαθής χώρος Banach τότε αυτός είναι διαχωρίσιμος $\Leftrightarrow$ ο X^* είναι διαχωρίσιμος.

- **Απόδειξη:** Αρχικά έχουμε δει ότι αν ο X^* είναι διαχωρίσιμος έπεται ότι ο X είναι διαχωρίσιμος. Τώρα αν ο X είναι διαχωρίσιμος τότε αφού είναι και αυτοπαθής και άρα: $\hat{X} = X^{**}$ έπεται ότι: X^{**} είναι διαχωρίσιμος $\Rightarrow$ X^* είναι διαχωρίσιμος

- **Θεώρημα:** Αν X είναι αυτοπαθής και διαχωρίσιμος χώρος Banach τότε $(\overline{B}_X, w)$ είναι συμπαγής και μετρικοποιήσιμος.

- **Απόδειξη:** Αρχικά αφού ο X είναι αυτοπαθής και διαχωρίσιμος έπεται ότι και ο X^* είναι διαχωρίσιμος από προηγούμενη πρόταση και άρα από Θεώρημα 1, ο $(\overline{B}_X, w)$ είναι μετρικοποιήσιμος. Τώρα αφού αυτός είναι μετρικοποιήσιμος για να αποδείξουμε ότι είναι w-συμπαγής αρκεί να αποδείξουμε ότι είναι w-ακολουθιακά συμπαγής. Πράγματι έστω $(x_n)_{n\geq1} \in \overline{B_X}^{\mathbb{N}}$ και έστω τώρα και $(x_n^*)_{n\geq1}$ ακολουθία στον X^* norm-πυκνή αφού αυτός είναι διαχωρίσιμος.

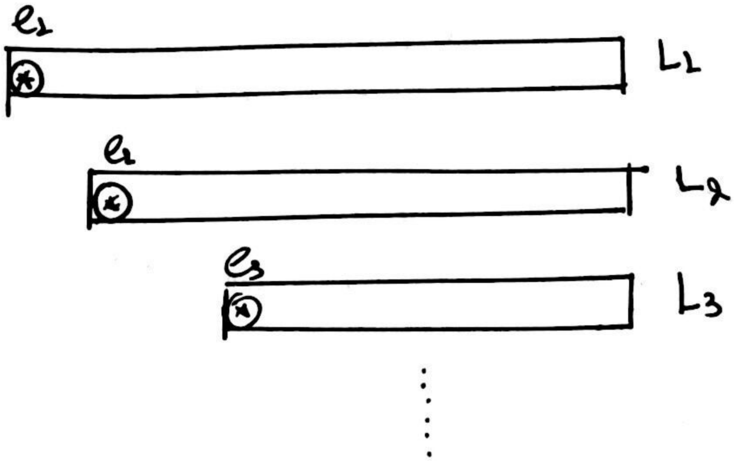
- <u>Διαγώνια Επιλογή</u>: <u>Standard Μέθοδος</u>:

Βήμα 1ο: $\exists L_1 \underset{\infty}{\subseteq} \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε: $\forall k\in\mathbb{N}$: $(x_k^*(x_n))_{n}$ [redacted] $_{\in L_1}$ είναι Cauchy.

- Για $k=1$: η $(x_1^*(x_n))_{n\geq1}$ είναι φραγμένη ακολουθία και άρα υπάρχει $L_1 \underset{\infty}{\subseteq} \mathbb{N}$ ώστε: $(x_1^*(x_n))_{n\geq1}$ να είναι Cauchy.
- Για $k=2$: $(x_2^*(x_n))_{n\in L_1}$ είναι φραγμένη ακολουθία και άρα υπάρχει $L_2 \underset{\infty}{\subseteq} L_1 \underset{\infty}{\subseteq} \mathbb{N}$ ώστε: $(x_2^*(x_n))_{n\in L_2}$ να είναι Cauchy.

- Αναδρομικά τώρα επιλέγουμε μια φθίνουσα ακολουθία άπειρων υποσυνόλων του [redacted] $\mathbb{N}$: $\mathbb{N} \underset{\infty}{\supseteq} L_1 \underset{\infty}{\supseteq} L_2 \underset{\infty}{\supseteq} \dots \underset{\infty}{\supseteq} L_k \supseteq \dots$ τέτοια ώστε: $(x_k^*(x_n))_{n\in L_k}$ να είναι Cauchy, $\forall k\in\mathbb{N}$.

Έστω τώρα: $L=\{\ell_1<\ell_2<\dots<\ell_k<\ell_{k+1}<\dots\} \underset{\infty}{\subseteq} \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε: $\forall k\in\mathbb{N}$: $L\setminus\{\ell_1<\dots<\ell_{k-1}\}=\{\ell_j : j\geq k\}\subseteq L_k$ (Διαγώνιο Σύνολο). <u>Πως γίνεται η επιλογή του διαγώνιου συνόλου L_j</u>



$\ell_1 = \min L_1$

$\ell_2 = \min\{i\in L_2 : i>\ell_1\}$

$\ell_3 = \min\{i\in L_3 : i>\ell_2\}$

$\vdots$

$\ell_k = \min\{i\in L_k : i>\ell_{k-1}\}$

Τότε: $\forall k\in\mathbb{N}$: $\forall j\geq k$: $\ell_j \in L_j \subseteq L_k$ και άρα: $\{\ell_j : j\geq k\}\subseteq L_k$.

Από την κατασκευή μας τώρα: $\forall k\in\mathbb{N}$: $(x_k^*(x_n))_{n\in L_k}$ είναι Cauchy και άρα: $\forall k\in\mathbb{N}$: $(x_k^*(x_n))_{n\in L}$ είναι Cauchy.

<u>Βήμα 2ο:</u> $\forall x^* \in X^*$: η $(x^*(x_n))_{n\in L}$ είναι Cauchy:

Έστω $\varepsilon>0$ τυχαίο. Αφού η $(x_k^*)_{k\in\mathbb{N}}$ είναι νορμ-πυκνή στον X^* έπεται ότι:

υπάρχει $k_0 \in \mathbb{N}$: [redacted] $\|x_{k_0}^* - x^*\| < \varepsilon/3$. Από την άλλη όμως έχουμε ότι:

$(x_{k_0}^*(x_n))_{n\in L}$ είναι Cauchy και άρα έπεται ότι υπάρχει J_0 [redacted] L: $\forall n,m \in L$:

και $n,m \geq J_0$: $|x_{k_0}^*(x_n) - x_{k_0}^*(x_m)| < \frac{\varepsilon}{\text{[redacted]} 3}$. Τότε: $\forall n,m \in L$ με $n,m \geq J_0$:

$$|x^*(x_n) - x^*(x_m)| \leq |x^*(x_n) - x_{k_0}^*(x_n)| + |x_{k_0}^*(x_n) - x_{k_0}^*(x_m)| + |x_{k_0}^*(x_m) - x^*(x_m)|$$

$$\leq \|x^* - x_{k_0}^*\| \, \|x_n\| + \frac{\varepsilon}{\text{[redacted]} 3} + \|x_{k_0}^* - x^*\| \, \|x_m\| \leq \frac{\varepsilon}{3}\cdot 1 + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3}\cdot 1 = \varepsilon$$

και άρα η $(x^*(x_n))_{n\in L}$ είναι Cauchy αφού το $\varepsilon>0$ ήταν τυχαίο. (και άρα και συγκλίνουσα).

– Ορίζουμε τώρα: $T: X^* \to \mathbb{R}$ με $T(x^*) = \lim_{n\in L} x^*(x_n) = \lim_{n\in L} \hat{x}_n(x^*)$.

Τώρα από το θεώρημα Ομοιόμορφου Φράγματος έχουμε ότι: $T \in X^{**}$ και επίσης:

$\|T\| \leq \liminf \|\hat{x}_n\| = \liminf \|x_n\| \leq 1$. Αφού τώρα όμως ο X είναι αυτοπαθής

$\Longrightarrow X^{**} = \hat{X} \Longrightarrow \exists\, x$ [redacted] $\in B_X$: $\hat{x} = T$. Τέλος: $\forall x^* \in X^*$: $x^*(x)$

$= \hat{x}(x^*) = T(x^*) = \lim_{n\in L} \hat{x}_n(x^*) = \lim_{n\in L} x$[redacted]$^*(x_n)$ και άρα: $(x_n)_{n\in L} \xrightarrow{w} x$

και άρα έχουμε το ζητούμενο.