- Μάθημα 8ο: Ανάλυση 2: Δαδός:

- **Λήμμα:** Έστω $f: X \to Y$ συνεχής, όπου X, Y είναι Hausdorff τοπολογικοί χώροι. Τότε: $Gr(f) \subseteq X \times Y$ είναι κλειστό.

- Απόδειξη: Έστω αρχικά $(x,y) \notin Gr(f) \Rightarrow f(x) \neq y \Rightarrow \exists\, U_1, U_2 \subseteq Y$ ανοικτά με: $y \in U_1$, $f(x) \in U_2$ και $U_1 \cap U_2 = \emptyset$. Θέτουμε: $V = f^{-1}(U_2)$ και τότε: $(x,y) \in V \times U_1$ και αν $(z,w) \in V \times U_1 \Rightarrow f(z) \in U_2 \wedge w \in U_1 \Rightarrow w \neq f(z) \Rightarrow (z,w) \notin Gr(f)$

- **Παρατήρηση:** $Gr(f)$ κλειστό $\not\Rightarrow$ f: συνεχής και αντιπαράδειγμα: $f(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0 \\ \frac{1}{x}, & x > 0 \end{cases}$

- **Θεώρημα Κλειστού Γραφήματος:** Έστω X, Y χώροι Banach και $T: X \to Y$ γραμμικός με $Gr(T) \subseteq X \times Y$ είναι κλειστό. Τότε ο T είναι φραγμένος.

- Απόδειξη: Ορίζουμε $|||x||| = \|x\|_X + \|T(x)\|_Y$, $\forall x \in X$ και τότε: $\|x\| \leq |||x|||$, $\forall x \in X$ και άρα από πόρισμα ανοικτής απεικόνισης αρκεί ν.δ.ο: $(X, |||\cdot|||)$ είναι Banach (γιατί τότε: $\exists\, c \in (0,1)$: $c|||x||| \leq \|x\|$, $\forall x \Rightarrow \|T(x)\|_Y \leq \left(\frac{1}{c} - 1\right)\|x\|$, $\forall x$)

Έστω τώρα $(x_n)_{n \geq 1} \in X^{\mathbb{N}}$ τ.ω: x_n $|||\cdot|||$-Cauchy. Τότε από την $*$ έχουμε ότι: (x_n) είναι $\|\cdot\|$-Cauchy και $(T(x_n))_{n \geq 1}$ είναι $\|\cdot\|_Y$-Cauchy και $(x_n, T(x_n)) \in Gr(T)$, $\forall n$ και άρα: $x_n \xrightarrow{\|\cdot\|_X} x$, $T(x_n) \xrightarrow{\|\cdot\|_Y} y$, $(x,y) \in Gr(T)$ αφού αυτό είναι κλειστό και άρα: $y = T(x)$. Τέλος: $x_n \xrightarrow{|||\cdot|||} x \iff \forall \varepsilon > 0: \exists\, n_0 \in \mathbb{N}: \forall n \geq n_0: |||x_n - x||| = \|x_n - x\| + \|T(x_n) - y\| < \varepsilon$ ($\|x_n - x\| < \frac{\varepsilon}{2}$ και $\|T(x_n) - y\| < \frac{\varepsilon}{2}$ ισοδύναμα) και αυτό ισχύει γιατί $x_n \xrightarrow{\|\cdot\|_X} x$ και $T(x_n) \xrightarrow{\|\cdot\|_Y} y$ και άρα έχουμε το ζητούμενο.

- Ασθενείς Τοπολογίες: (Εισαγωγή):

▸ Λήμμα: Έστω X διανυσματικός χώρος και $f_1,\dots,f_n, g: X\to\mathbb{R}$ γραμμικές. ΤΑΕΙ:

1. $\bigcap_{i=1}^n \ker f_i \subseteq \ker g$
2. $\exists \lambda_1,\dots,\lambda_n\in\mathbb{R}: g=\sum_{i=1}^n \lambda_i f_i$

- Απόδειξη: 2 ⇒ 1. Προφανές.

1 ⇒ 2. Ορίζουμε $\pi: X\to\mathbb{R}^n$ με $\pi(x)=(f_1(x),\dots,f_n(x))$. Τότε έχουμε ότι ο $\pi(X)=Y$ είναι διανυσματικός υπόχωρος του $\mathbb{R}^n$. Ορίζουμε: $h: Y\to\mathbb{R}$ με: $h(f_1(x),\dots,f_n(x))=g(x)$. Η h είναι καλά ορισμένη και γραμμική γιατί: $(f_1(x),\dots,f_n(x)) = (f_1(y),\dots,f_n(y)) \Rightarrow (f_1(x-y),\dots,f_n(x-y))=\vec{0}_{\mathbb{R}^n} \Rightarrow x-y\in\bigcap_{i=1}^n\ker f_i\subseteq\ker g$ $\Rightarrow g(x-y)=0 \Rightarrow g(x)=g(y)\Rightarrow h(f_1(x),\dots,f_n(x))=h(f_1(y),\dots,f_n(y))$ και άρα είναι καλά ορισμένη απεικόνιση. Έστω $\tilde{h}:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ με $\tilde{h}|_Y = h$ και θέτουμε: $\lambda_i=\tilde{h}(\vec{e_i})$, $\forall i=1,\dots,n$. Επιπλέον: $\forall x\in X: g(x)=h(f_1(x),\dots,f_n(x)) =$ [redacted] $\tilde{h}\left(\sum_{i=1}^n f_i(x)\vec{e_i}\right) = \sum_{i=1}^n f_i(x)\tilde{h}(\vec{e_i}) = \sum_{i=1}^n \lambda_i f_i(x)$

▸ Ορισμός: Έστω X διανυσματικός χώρος και $\Gamma\subseteq X^*$ που διαχωρίζει τα σημεία του X δηλαδή: $\forall x\neq y$ στο X: $\exists f\in\Gamma: f(x)\neq f(y)$. Συμβολίζουμε: με (X,Γ) την ελάχιστη τοπολογία στο X που κάνει όλα τα στοιχεία του Γ συνεχή.

- Θεώρημα: Έστω X διανυσματικός χώρος και $\Gamma\subseteq X^*$ που διαχωρίζει τα σημεία του X. Τότε: (α). Η οικογένεια $\{W(x,A,\varepsilon): x\in X, A\subseteq\Gamma$ πεπερασμένο, $\varepsilon>0\}$ είναι βάση περιοχών της (X,Γ) όπου: $W(x,A,\varepsilon)=\{y\in X: |f(x)-f(y)|<\varepsilon, \forall f\in A\}$

(β). Ο (X,Γ) είναι τοπολογικός διανυσματικός χώρος (εννοείται Hausdorff)

(γ). Ο (X,Γ) είναι τοπικά κυρτός

(δ). $(X,\Gamma)^* = \langle\Gamma\rangle$ $\left((X,(X,\Gamma))^* = (X,\Gamma)^*\right)$

Απόδειξη: 1). Είναι ΟΚ από προηγούμενα.

2). Εάν $x,y \in X$ και $x+y \in \mathcal{U} \in (X,\Gamma)$. Χωρίς βλάβη της γενικότητας: $\mathcal{U} \supseteq W(x+y, A, \varepsilon)$, όπου $\varepsilon > 0$ και $A \subseteq \Gamma$ πεπερασμένο. Τότε αν $\mathcal{U}_1 = W(x, A, \varepsilon/2)$ και $\mathcal{U}_2 = W(y, A, \frac{\varepsilon}{2})$ και τότε: $\mathcal{U}_1 + \mathcal{U}_2 \subseteq W(x+y, A, \varepsilon) \subseteq \mathcal{U}$ από τριγωνική ανισότητα ~~γιατί: αν $f \in A$, $\forall z_1, z_2 \in X$~~ με: προφανώς. Επίσης: $x \in \mathcal{U}_1$, $y \in \mathcal{U}_2$ και άρα η $+$ είναι συνεχής. Με όμοιο τρόπο και ο $\cdot$ είναι συνεχής ((X,Γ)-συνεχής).
Τέλος: αν $x \neq y$ επιλέγουμε $\varepsilon > 0$ και $f \in \Gamma$ τέτοια ώστε: $|f(x) - f(y)| > 2\varepsilon$ (γιατί η Γ διαχωρίζει τα σημεία) και θέτουμε: [redacted] $V = W(y, \{f\}, \varepsilon)$ και $\mathcal{U} = W(x, \{f\}, \varepsilon)$ και τότε: $x \in \mathcal{U}$, $y \in V$ και $\mathcal{U} \cap V = \emptyset$ και άρα είναι Hausdorff, αφού τα $\mathcal{U}, V$ είναι και ανοικτά.

3). Για κάθε $A \subseteq \Gamma$ πεπερασμένο, $\forall \varepsilon > 0$ το σύνολο: $W(0, A, \varepsilon) = \{x \in X : |f(x)| < \varepsilon, \forall f \in A\}$. Αλλά η οικογένεια $\{W(0,A,\varepsilon) : A \subseteq \Gamma \text{ πεπερασμένο}, \varepsilon > 0\}$ είναι βάση περιοχών του 0.

4). $(X,\Gamma)^* \subseteq X^{\#}$ [redacted] που αποτελείται από όλες τις γραμμικές $f: X \to \mathbb{R}$ που είναι (X,Γ)-συνεχείς. Εξ' ορισμού έχουμε ότι: $\Gamma \subseteq (X,\Gamma)^* \Rightarrow \langle \Gamma \rangle \subseteq (X,\Gamma)^*$.
Αντίστροφα τώρα: $g \in (X,\Gamma)^*$. Τότε έχουμε ότι g είναι (X,Γ)-φραγμένο και άρα υπάρχει $\mathcal{U} \in (X,$ [redacted] $\Gamma)$ με $0 \in \mathcal{U}$ και $g(\mathcal{U})$: φραγμένο $\Rightarrow \exists A \subseteq \Gamma$ πεπερασμένο και $\varepsilon > 0$ τ.ω: $g(W(0,A,\varepsilon))$ [redacted]: φραγμένο. Γράφουμε: $A = \{f_1, \dots, f_n\} \subseteq \Gamma$. Ισχυρισμός: $\bigcap_{i=1}^{n} \ker f_i \subseteq \ker g$: Έστω όχι και τότε υπάρχει $z \in \bigcap_{i=1}^{n} \ker f_i$ με $g(z) > 0$ χ.β.γ. Τότε $\forall t > 0$: $tz \in \bigcap_{i=1}^{n} \ker f_i \Rightarrow tz \in W(0,A,\varepsilon) \Rightarrow tz \in W(0,A,\varepsilon) \subseteq \mathcal{U}$ $\Rightarrow \{g(tz) : t \in \mathbb{R}\} = \{t\,g(z) : t \in \mathbb{R}\}$ φραγμένο, το οποίο είναι άτοπο αφού: $g(z) > 0$.
Επομένως από προηγούμενο λήμμα και ισχυρισμό: $\exists \lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$: $g = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i f_i \in$ [redacted] $\in A \subseteq \langle \Gamma \rangle$.

- <u>Ορισμός</u>: Έστω X χώρος Banach. Η ασθενής τοπολογία του X είναι η (X, X^*)

▷ <u>Άσκηση</u>: Ο X^* διαχωρίζει τα σημεία του X.

- <u>Πρόταση</u> 1: Έστω X απειροδιάστατος χώρος Banach. Τότε ο (X, w) δεν είναι 1ος αριθμήσιμος και άρα δεν είναι μετρικοποιήσιμος.

- <u>Πρόταση</u> 2: Αν X είναι απειροδιάστατος χώρος Banach, τότε αυτός δεν έχει αριθμήσιμη Hamel βάση.

- <u>Απόδειξη 2</u>: Έστω όχι και άρα $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ αριθμήσιμη Hamel βάση του X. Για κάθε $k \in \mathbb{N}$ ορίζουμε: $Y_k = \text{span}\{x_1, \dots, x_k\} \subseteq X$ πεπερασμένης διάστασης υπόχωρος του X. Αφού τώρα $(x_n)_{n \geq 1}$ είναι Hamel βάση έπεται ότι: $X = \bigcup_{k=1}^{\infty} Y_k$ και άρα από το λήμμα του Baire έπεται ότι: $\exists\, k_0 \in \mathbb{N}: \text{int}(Y_{k_0}) \neq \emptyset$ $\Rightarrow$ και άρα υπάρχει x και $r > 0$: $B(x,r) \subseteq Y_{k_0}$ και άρα: $B(0,r) = B(x,r) - x \subseteq Y_{k_0} - Y_{k_0} \subseteq Y_{k_0} \Rightarrow X = \bigcup_{\lambda > 0} B(0, \lambda r) = Y_{k_0}$ και άρα: $\dim X < \infty$ άτοπο.

- <u>Απόδειξη 1</u>: Έστω όχι και άρα τότε έχουμε ότι το 0 έχει αριθμήσιμη βάση περιοχών $\Rightarrow \exists\, (A_n)_{n \geq 1}$ πεπερασμένα υποσύνολα του Γ και $\exists\, (\varepsilon_n)_{n \geq 1} \in (0, +\infty)^{\mathbb{N}}$ τέτοια ώστε: $\forall\, 0 \in W \in (X, X^*)$: $\exists\, n \in \mathbb{N}$: $0 \in W(0, A_n, \varepsilon_n) \subseteq W$. Έστω τώρα $f \in X^*$ και τότε το f είναι ασθενές συνεχές και άρα: f ασθενώς φραγμένο και άρα $\exists\, n_0 \in \mathbb{N}$: $\cancel{f(0, A_{n_0}, \varepsilon_{n_0})}$ $f(W(0, A_{n_0}, \varepsilon_{n_0}))$ φραγμένο. Αν τώρα: $A_{n_0} = \{f_1, \dots, f_k\}$ τότε: $\bigcap_{i=1}^{k} \ker f_i \subseteq \ker f$ (απόδειξη όπως πριν) και άρα από λήμμα έπεται ότι: $f \in \langle A_{n_0} \rangle \subseteq \langle \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \rangle$ και αφού η $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ είναι αριθμήσιμο σύνολο έπεται ότι: αφού: $X = \langle \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \rangle \Rightarrow$ Ο X έχει αριθμήσιμη Hamel βάση και άρα $\dim X = +\infty$ $\Rightarrow \dim X^* = +\infty$ το οποίο είναι άτοπο αφού ο X^* είναι χώρος Banach.

- **Θεώρημα: (Mazur):**

Αν $\emptyset \neq C \subseteq X$ κλειστό και κυρτό $\Longrightarrow$ C ασθενώς κλειστό

- **Απόδειξη:** Έστω όχι και τότε: $C \subsetneq \overline{C}^{w}$ και άρα υπάρχει $x \in \overline{C}^{w}$ με $C \cap \{x\} = \emptyset$. Τότε από το 2ο διαχωριστικό θεώρημα έπεται ότι:

$\exists f \in X^*$ με $\|f\| = 1$ με: $\sup\limits_{y \in C} f(y) < c < f(x)$. για κάποιο $c > 0$.

Τότε: $F = \{z \in X : f(z) \leq c\}$ [redacted] $=$ [redacted] $f^{-1}((-\infty, c])$ [redacted] είναι ασθενώς κλειστό και $F \supseteq C$ και άρα: $F \supseteq \overline{C}^{w} \ni x$ και άρα άτοπο.

- **Πρόταση:** Αν X είναι απειροδιάστατος χώρος Banach τότε: $\overline{S_X}^{w} = \overline{B_X(0,1)}^{\|\cdot\|}$