Ανάλυση ΙΙ Μάθημα 06. 

Ορσ: Έστω $(X, \|\cdot\|)$ χώρος με νόρμα. Ο $(X, \|\cdot\|)$ καλείται χώρος Banach αν ο $X$ είναι πλήρης με την μετρική $d_{\|\cdot\|}(x,y) = \|x-y\|$.

Πρόταση: Αν $X, Y$ χώροι με νόρμα και $T: X \to Y$ γραμμ. τ.α.ε.ι.

(α) $T$ συνεχής (β) $T$ συνεχής στο $0$

(γ) $\exists M>0: \|Tx\|_Y \leq M\|x\|_X, \forall x \in X$.

Ορσ: Αν $X, Y$ χ.μ.ν. ορίζουμε

$\mathcal{L}(X,Y) = \{T: X \to Y \mid T \text{ γραμμ.}\}$.

$\mathcal{B}(X,Y) = \{ \quad " \quad \mid T \text{ γραμμ., φραγμ.}\}$.

Παρατήρηση: $\mathcal{L}(X,Y)$ είναι δ.χ. και $\mathcal{B}(X,Y)$ είναι δ. υπόχωρός του.

~~Θεώρημα~~

Ορσ: Αν $X, Y$ χ.μ.ν., $\forall T \in \mathcal{B}(X,Y)$

$\|T\| = \sup\{\|T(x)\| \mid \|x\| \leq 1\} = \inf\{M>0 \mid \|Tx\| \leq M\|x\| \ \forall x \in X\}$.

**Πρόταση/Άσκηση** Ο $(\mathcal{B}(X,Y), \|\cdot\|)$ ②

είναι χώρος με νόρμα.

**Θεώρημα**: Αν $X$ χ.μ.ν. και $Y$ χώρος Banach $\Rightarrow \mathcal{B}(X,Y)$ είναι Banach.

**Απόδ**: Έστω $(T_n)$ Cauchy στον $\mathcal{B}(X,Y)$, δηλ. $\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}: \forall m, n \geq n_0$

$\|T_n - T_m\| < \varepsilon$.

Ειδικότερα, $\forall x \in X: (T_n x)_{n \in \mathbb{N}}$ είναι Cauchy. $\left[ \|T_n x - T_m x\| \leq \|T_n - T_m\| \|x\| \right]$

Αφού $Y$ πλήρης $\Rightarrow Tx = \lim_{n \to \infty} T_n x$

Ο $T: X \to Y$ είναι γραμμικός (από γραμμ. ορίου)

Αν $\varepsilon > 0$: $\exists n_0 \in \mathbb{N}: \forall n, m \geq n_0$

$\|T_n x - T_m x\| \leq \varepsilon \|x\| \xrightarrow{m \to \infty} \forall n \geq n_0$:

$\|T_n x - Tx\| \leq \varepsilon \|x\|$.

$$\Rightarrow \left. \begin{array}{l} T_{n_0} - T \in \mathcal{B}(X,Y) \\ T_{n_0} \in \mathcal{B}(X,Y) \end{array} \right\} \Rightarrow T \in \mathcal{B}(X,Y)$$

Τέλος, για ε>0, ∃ $n_0$: ∀ $n \geq n_0$: ③

$\|T_n x - T x\| < \varepsilon$, $\forall x : \|x\| \leq 1$

$\Rightarrow \sup_{\|x\| \leq 1} \|T_n x - T x\| \leq \varepsilon \Rightarrow \|T_n - T\| \leq \varepsilon$

$\Rightarrow T_n \xrightarrow{\|\cdot\|} T$.

<u>Πόρισμα</u>: Για κάθε $X$ χ.ν.χ. ο $X^*$ είναι Banach.

<u>Παρατήρηση</u> $\forall x^* \in X^*$:

$\|x^*\| = \sup \{ |x^*(x)| \mid \|x\| \leq 1 \}$.

$= \sup \{ x^*(x) \mid \|x\| \leq 1 \}$.

<u>Πρόταση</u>: $X$ χ.ν.χ. και $x_0 \in X \setminus \{0\}$. Τότε υπάρχει $f \in X^*$: $\|f\| = 1$ και $f(x_0) = \|x_0\|$.

<u>Απόδ.</u> Ορίζουμε $Y = \{ \lambda x_0 \mid \lambda \in \mathbb{R} \}$. και $w: Y \to \mathbb{R}$, $w(\lambda x_0) = \lambda \|x_0\|$

Τότε $w$ γραμμική και $|w(y)| \leq \|y\|$ $\forall y \in Y$

Από το θεώρημα <u>Hahn-Banach</u>.

υπάρχει $\varphi \in X^{*}$: $\varphi|_{Y} = w$ και

$|\varphi(x)| \leq \|x\|$, $\forall x \in X \Rightarrow \|\varphi\| \leq 1$.

Από την άλλη: $\varphi(x_0) = w(x_0) = \|x_0\|$

$\Rightarrow \varphi\left(\frac{x_0}{\|x_0\|}\right) = 1 \Rightarrow 1 \leq \|\varphi\|$. Ει.

Πόρισμα: Αν $X$ χ.ν.

$\|x\| = \sup\{\varphi(x) \mid \|\varphi\| \leq 1, \varphi \in X^{*}\}$.

$= \max\{\quad " \quad " \quad\}$.

Πρόταση: Έστω $X$ Banach $Y \hookrightarrow X$

κλειστός, $x_0 \notin Y$. Τότε υπάρχει

$\varphi \in X^{*}$: $\varphi(x_0) = d(x_0, Y) = \inf\{\|x_0 - y\| \mid y \in Y\}$.

απόδ: Έστω $Z = \langle Y \cup \{x_0\} \rangle$.

$w: Z \to \mathbb{R}$ με $w(y + \lambda x_0) = \lambda d$.

$(d = d(x_0, Y)) \Rightarrow w$ γραμμ. και

$\|z\| = \|y + \lambda x_0\| = \|(-\lambda)(x_0 - \underbrace{\tfrac{y}{\lambda}}_{\in Y})\|$

$\geq |\lambda| \cdot d = |w(z)|$

Απο το Θ. Hahn-Banach:

$\exists\, \varphi \in X^{*}:\ \varphi|_{Z} = u$ και $|\varphi(x)| \leq \|x\|$ $\forall x \in X$

$\Rightarrow \|\varphi\| \leq 1 \Rightarrow \varphi \in X^{*}$

Επιπλέον $\varphi(x_0) = u(x_0) = d$.

Τέλος, έστω $(y_n)$ σου $Y$ τ.ω. $\|y_n - x_0\| \to d \Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}$:

$d = |u(y_n - x_0)| \leq |\varphi(y_n - x_0)|$

$\leq \|\varphi\|\,\|y_n - x_0\| \xrightarrow{n\to\infty} d \Rightarrow 1 \leq \|\varphi\|$.

Άρα, $\|\varphi\| = 1$ $\square$

<u>Ορσ.</u>: Έστω $X, Y$ χ.μ.ν. και

$T: X \to Y$ γραμμ.

(α) Ο $T$ είναι "<u>ισομορφισμός</u>" αν είναι 1-1, επί και $\|T\|, \|T^{-1}\| < \infty$.

(β) $T$ είναι <u>ισομετρία</u> αν $\|Tx\| = \|x\|$ και επί

(γ) Ο $T$ καλείται <u>ισομετρική εμφύτευση</u> αν $\|Tx\| = \|x\|$.

<u>Ορσ</u>: $X$ χ.ν.ν. Ορίζουμε

$J: X \to X^{**}$ : $\hat{x}(x^*) = x^*(x)$

$\forall x^* \in X^*$

Η $J$ καλείται <u>κανονική εμφύτευση</u>

<u>Πρόταση</u>: Η κανονική εμφύτευση είναι καλά ορσ., γραμμ. ισομετρική εμφύτευση.

<u>αποδ.</u>: Έστω $x \in X$. Τότε

$$\hat{x}(\lambda x^* + \mu y^*) = (\lambda x^* + \mu y^*)(x)$$

$$= \lambda x^*(x) + \mu y^*(x) = \lambda \hat{x}(x^*) + \mu \hat{x}(y)$$

$\to$ $\hat{x}$ είναι γραμμική.

Επιπλέον.

$$\|\hat{x}\|_{X^{**}} = \sup \{ |\hat{x}(x^*)| \mid \|x^*\| \leq 1 \}.$$

$$= \sup \{ x^*(x) \mid \|x^*\| \leq 1 \}.$$

$$= \|x\|_X$$

Άρα $\hat{x} \in X^{**} \to J$ είναι καλά ορσ.

Επιπλέον αν $x, y \in X$

9

$$\widehat{\lambda x + \mu y}(x^*) = x^*(\lambda x + \mu y)$$

$$= \lambda x^*(x) + \mu x^*(y) = \lambda \hat{x}(x^*) + \mu \hat{y}(x^*) \quad \forall x^*$$

Άρα, ο $J$ είναι γραμμικός και ισομετρική εμφύτευση.