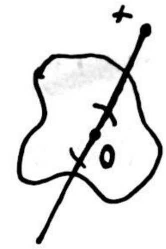
• Μάθημα 4ο: Ανάλυση 2: Δοξός:

- **Ορισμός:** Έστω X διανυσματικός χώρος και $K \subseteq X$. Ένα σημείο $x_0 \in K$ καλείται γεωμετρικό εσωτερικό του K αν $\forall x \in X: \exists \varepsilon_x > 0$ τ.ω: $x_0 + tx \in K, \forall |t| < \varepsilon_x$



- **Ορισμός:** Έστω X διανυσματικός χώρος και $K \subseteq X$ κυρτό με $0 \in K$. Ορίζουμε: $P_K : X \to \mathbb{R}$ με $P_K(x) = \inf\{\tau > 0 : \frac{x}{\tau} \in K\}$ και το P_K καλείται συναρτησιακό Minkowski του K.

▶ **Πρόταση:** Έστω X διανυσματικός χώρος και $K \subseteq X$ κυρτό με $0 \in K$ να είναι γεωμετρικό εσωτερικό του K. Τότε το P_K είναι καλά ορισμένο υπογραμμικό συναρτησιακό και έχουμε ότι: $\{x \in X : P_K(x) < 1\} \subseteq K \subseteq \{x \in X : P_K(x) \le 1\}$

- **Απόδειξη:**

1. Το P_K είναι καλά ορισμένο: Για να το αποδείξουμε αυτό πρέπει να αποδείξουμε ότι το $\{\tau > 0 : \frac{x}{\tau} \in K\}, \forall x \in X$ είναι μη κενό και κάτω φραγμένο. Έστω επομένως $x \in X$. Τότε: (α). αν $x = 0$: τότε: $\{\tau > 0 : \frac{x}{\tau} \in K\} = \{\tau > 0 : 0 \in K\} = \{\tau > 0\}$ και άρα: $P_K(0) = 0$. Αν τώρα: $x \neq 0$ τότε παρατηρούμε ότι αφού το 0 είναι γεωμετρικό εσωτερικό του K έπεται ότι: $\exists \varepsilon_x > 0$: τ.ω: [redacted] $tx \in K, \forall |t| < \varepsilon_x \overset{*}{\Rightarrow} \exists \tau > 0 : \frac{x}{\tau} \in K \Rightarrow \{\tau > 0 : \frac{x}{\tau} \in K\} \neq \emptyset$ και άρα έχουμε ότι το $P_K(x)$ ορίζεται. (* ~~πάρε τ>0 με: τ>~~ [redacted] $\cancel{\frac{1}{\varepsilon_x}}$ και τότε: $\cancel{0 < \frac{1}{\tau} < \varepsilon_x}$)* π.χ: $\frac{\varepsilon_x}{2}$

2. $\{x \in X : P_K(x) < 1\} \subseteq K$: Παρατηρούμε ότι αν πάρουμε $x \in X$ με $P_K(x) = \inf\{\tau > 0 : \frac{x}{\tau} \in K\} < 1$ έπεται ότι: $\exists$ [redacted] $\tau \in (0,1)$: $\frac{x}{\tau} \in K$ και άρα αφού το $0 \in K$ και το K είναι και κυρτό έπεται ότι: $(1-\tau)0 + \tau \frac{x}{\tau} = x \in K$ και άρα έχουμε το ζητούμενο.

3. $K \subseteq \{x \in X : P_K(x) \le 1\}$: Παρατηρούμε ότι αν πάρουμε $x \in K$ τότε πρέπει να αποδείξουμε ότι: $P_K(x) \le 1$ και παρατηρούμε ότι αφού $x \in K$ έχουμε ότι: $1 \in \{\tau > 0 : \frac{x}{\tau} \in K\}$ και άρα: $P_K(x) \le 1$

4. Τώρα για το ότι το P_K είναι θετικά ομογενές: πρέπει να αποδείξουμε ότι: $\forall \lambda > 0 : \forall x \in X$: $P_K(\lambda x) = \lambda P_K(x)$ και άρα για $\lambda > 0$ και $x \in X$: $\cancel{\{ \text{[redacted]} \tau > 0 : \frac{\lambda x}{\tau} \in K\} =}$ $w = \frac{\lambda}{\tau}$ τότε: αν $x = 0$: $P_K(\lambda x) = P_K(0) = \lambda P_K(0) = 0$ και αν $x \neq 0$: $P_K(\lambda x) = \inf\{\tau > 0 : \frac{\lambda x}{\tau} \in K\} = \inf\{\tau > 0 : \frac{x}{\tau/\lambda} \in K\} \overset{\tau' = \frac{\tau}{\lambda}}{=} \inf\{\lambda \tau' > 0 : \frac{x}{\tau'} \in K\}$
$= \lambda \inf\{\tau' > 0 : \frac{x}{\tau'} \in K\} = \lambda P_K(x)$

■ **Πρόταση:**

Έστω X τοπολογικός διανυσματικός χώρος και $p: X \to \mathbb{R}$ υπογραμμικό. ΤΑΕΙ:

1: p είναι συνεχές

2: p είναι συνεχές στο 0

3: $\exists V \subseteq X$ ανοιχτό με $0 \in V$ και $p(V) \subseteq (-M, M)$ για κάποιο $M > 0$

⊛ Από ⊛ και ισχυρισμό έπεται ότι: $\forall t > 1-\varepsilon_x : tx \notin K \Rightarrow \forall\, 0 < s < \dfrac{1}{1-\varepsilon_x} : \dfrac{x}{s} \notin K$

$\Rightarrow \{\tau > 0 : \frac{x}{\tau} \in K\} \subseteq \left[\frac{1}{1-\varepsilon_x}, \infty\right)$ και άρα: $P_K(x) \geq \dfrac{1}{1-\varepsilon_x} > 1$

- **Παρατήρηση:** Αν $K \subseteq X$ κυρτό και $0 \in K$ γεωμετρικό εσωτερικό του K, τότε τα $\{x \in X : P_K(x) < 1\}$ και $\{x \in X : P_K(x) \leq 1\}$ είναι κυρτά.

- **Πόρισμα:** Έστω X τοπολογικός διανυσματικός χώρος και $K \subseteq X$ κυρτό με $Int(K) \neq \emptyset$. Τότε τα $Int(K)$ και $\overline{K}$ είναι κυρτά.

- **Απόδειξη:** Αν $0 \in Int(K)$ τότε το συμπέρασμα είναι άμεσο από προηγούμενη παρατήρηση και πρόταση. Γενικά: επιλέγουμε $a \in Int(K)$ και έστω $L = K - a$.

Ισχυρισμός: $Int(L) = Int(K) - a$, ■ $\overline{L} = \overline{K} - a$ (άσκηση)

Ειδικότερα: $Int(K) = Int(L) + a$, $\overline{K} = \overline{L} + a$ και $Int(L), \overline{L}$ είναι κυρτά αφού $0 \in Int(L)$

- **Πρόταση:** Έστω X τοπολογικός διανυσματικός χώρος, $K \subseteq X$ κυρτό με $0 \in Int(K)$. Τότε: $\forall x \in X$: $P_K(x) = P_{intK}(x) = P_{\overline{K}}(x)$

- **Απόδειξη:** Σταθεροποιούμε $x \in X$. Τότε: $\inf\{\tau > 0 : \frac{x}{\tau} \in Int(K)\} \geq \inf\{\tau > 0 : \frac{x}{\tau} \in K\}$

$\Rightarrow P_{intK}(x) \geq P_K(x)$ ($A \subseteq B \Rightarrow \inf A \geq \inf B$). Άρα μένει να αποδείξουμε ότι:

$\forall s > 0$: $P_K(x) < s \Rightarrow P_{intK}(x) \leq s$. Πράγματι: αν $P_K(x) < s \overset{\text{υποθ.}}{\Rightarrow} P_K\left(\frac{x}{s}\right) < 1 \overset{\text{πρόταση}}{\Rightarrow} \frac{x}{s} \in Int(K)$

$\Rightarrow P_{intK}\left(\frac{x}{s}\right) \leq 1 \Rightarrow P_{intK}(x) \leq s$ από υπογραμμικότητα. Αντίστοιχα παρατηρούμε ότι:

$\inf\{\tau > 0 : \frac{x}{\tau} \in K\} \geq \inf\{\tau > 0 : \frac{x}{\tau} \in \overline{K}\} \Rightarrow P_K(x) \geq P_{\overline{K}}(x)$ και άρα μένει να αποδείξουμε ότι: $\forall s > 0$: $P_K(x) > s \Rightarrow P_{\overline{K}}(x) \geq s$. Έστω επομένως $s > 0$: $P_K(x) > s$

$\Rightarrow P_K\left(\frac{x}{s}\right) > 1 \overset{\text{πρόταση}}{\Rightarrow} \frac{x}{s} \notin \overline{K}$ και $\overline{K} \subseteq X$ κυρτό με $0 \in \overline{K}$.

και έχουμε ότι: $V \subseteq \text{int}(K) \subseteq K \subseteq \{x\in X: p_K(x)\le 1\}$ απο άλλη πρόταση.

Επομένως: $V \subseteq p_K^{-1}([-1,1])$ και άρα έχουμε το ζητούμενο.

- <u>Πρόταση:</u> Έστω X τοπολογικός διανυσματικός χώρος και $K\subseteq X$ κυρτό με $0\in \text{Int}(K)$.

1. $x\in \text{Int}(K) \iff p_K(x)<1$ ($\text{Int}(K)=\{x\in X: p_K(x)<1\}$)
2. $x\in \overline{K} \iff p_K(x)\le 1$ ($\overline{K}=\{x\in X: p_K(x)\le 1\}$)

Απόδειξη: 1). ~~Αν $x\in$~~ Το p_K είναι συνεχές και άρα: $p_K^{-1}((-\infty,1))$ είναι ανοιχτό στον X και έχουμε ότι: $p_K^{-1}((-\infty,1)) \subseteq K$ γιατί αν $p_K(x)<1 \Rightarrow x\in K$ απο πρόταση. Άρα $p_K^{-1}((-\infty,1)) \subseteq \text{Int}(K)$. Αντίστροφα τώρα έχουμε ότι: αν $x\in \text{Int}(K)$ ~~με έστω~~ $x\neq 0$. Η $f_x: \mathbb{R}\to X$ με $f_x(\lambda)=\lambda x$ είναι συνεχής και άρα $f_x^{-1}(\text{Int}K) \subseteq \mathbb{R}$ είναι ανοιχτό και $1\in f_x^{-1}(\text{Int}K)$ και άρα: $\exists \varepsilon_x>0$: ~~$(-\varepsilon_x,\varepsilon_x)\subseteq f_x^{-1}(\text{Int}K)$~~ $(1-\varepsilon_x, 1+\varepsilon_x)\subseteq f_x^{-1}(\text{Int}K)$ και άρα: $(1+\frac{\varepsilon_x}{2})x \in \text{Int}K \subseteq K$ και άρα: $\frac{1}{1+\frac{\varepsilon_x}{2}} \in \{t>0: \frac{x}{t}\in K\}$ και άρα: $p_K(x)\le \frac{1}{1+\varepsilon_x} < 1$ και άρα αποδείχτηκε.

2). Το p_K είναι συνεχές απο πρόταση 2 και άρα: $p_K^{-1}((-\infty,1])$ είναι κλειστό με $K\subseteq p_K^{-1}((-\infty,1])$ και άρα: $\overline{K}\subseteq \{x\in X: p_K(x)\le 1\}$. Αντίστροφα τώρα αρκεί να αποδείξουμε ότι: αν $x\notin \overline{K}$ τότε: $p_K(x)>1$. Σταθεροποιούμε $x\notin\overline{K}$. Η συνάρτηση $f_x: \mathbb{R}\to X$: $f_x(\lambda)=\lambda x$ είναι συνεχής και άρα $f_x^{-1}(X\setminus\overline{K})\subseteq\mathbb{R}$ ανοιχτό με $1\in f_x^{-1}(X\setminus\overline{K})$ αφού $X\setminus\overline{K}$ είναι ανοιχτό στο X. Επομένως: $\exists \varepsilon_x>0$ τέτοιο ώστε: $(1-\varepsilon_x,1+\varepsilon_x)\subseteq f_x^{-1}(X\setminus\overline{K}) \Rightarrow \forall t\in(1-\varepsilon_x,1+\varepsilon_x)$: $tx\in X\setminus\overline{K}$ $\Rightarrow \forall t\in(1-\varepsilon_x,1+\varepsilon_x)$: $tx\notin\overline{K}\Rightarrow tx\notin K$. (*)

• <u>Ισχυρισμός:</u> Αν X είναι διανυσματικός χώρος, $0\in K\subseteq X$ κυρτό, $x\in X$, $\mu>0$ τ.ω: $\mu x\notin K \Rightarrow \forall \lambda>\mu: \lambda x\notin K$

• Έστω όχι: δηλαδή $\exists \lambda>\mu: \lambda x\in K$, $0\in K$, K: κυρτό $\Big\}$ $\frac{\mu}{\lambda}\cdot\lambda x + (1-\frac{\mu}{\lambda})0\in K \Rightarrow \mu x\in K$, άτοπο

5. Το P_K είναι ~~υποραθετικό~~ υποπροσθετικό: Πράγματι έστω $x,y\in X$ και αρκεί να αποδείξουμε ότι: $P_K(x+y)\le P_K(x)+P_K(y)$. Έστω $\varepsilon>0$: και τότε θέτουμε $\tau_1=P_K(x)$ και $\tau_2=P_K(y)$ και έχουμε ότι: $P_K(x)<P_K(x)+\frac{\varepsilon}{2}$ και $P_K(y)<P_K(y)+\frac{\varepsilon}{2} \Rightarrow P_K(x)<\tau_1+\frac{\varepsilon}{2}$ και $P_K(y)<\tau_2+\varepsilon$ και άρα απ' αυτό έπεται ότι: $\exists \tau_1'>0: P_K(x)\le \tau_1'<\tau_1+\frac{\varepsilon}{2}$ και $\frac{x}{\tau_1'}\in K$ και: $\exists \tau_2'>0: P_K(y)\le \tau_2'<\tau_2+\frac{\varepsilon}{2}$ και $\frac{x}{\tau_2'}\in K$. Τότε όμως έχουμε ότι αν θέσουμε: $\tau'=\tau_1'+\tau_2'$ τότε: αφού $\frac{x}{\tau_1'}\in K$ και $\frac{x}{\tau_2'}\in K \Rightarrow \frac{\tau_1'}{\tau'}\frac{x}{\tau_1'}+\left(1-\frac{\tau_1'}{\tau'}\right)\frac{x}{\tau_2'}\in K$

$\Rightarrow \frac{x}{\tau'}+\frac{y}{\tau'}\in K \Rightarrow \frac{x+y}{\tau'}\in K \Rightarrow \tau'\in\{\tau>0: \frac{x+y}{\tau}\in K\} \Rightarrow P_K(x+y)\le \tau'$

$=\tau_1'+\tau_2'<\tau_1+\tau_2+\varepsilon = P_K(x)+P_K(y)+\varepsilon,\ \forall\varepsilon>0 \Rightarrow P_K(x+y)\le P_K(x)+P_K(y)$. [redacted]

- Λήμμα 1ο: Έστω X τοπολογικός διανυσματικός χώρος και $x\in X$. Τότε η $f_x:\mathbb{R}\to X$ με $f_x(\lambda)=\lambda x$ είναι συνεχής. (μάλιστα είναι και 1-1 και ομοιομορφισμός επί της εικόνας)

(Δεν θα κάνουμε απόδειξη)

- Λήμμα 2ο: Έστω X τοπολογικός διανυσματικός χώρος και $K\subseteq X$ [redacted] με $0\in Int(K)$. Τότε το 0 είναι γεωμετρικό εσωτερικό του K.

- Απόδειξη: Αφού [redacted] αν σταθεροποιήσουμε $x\in X$ έχουμε από προηγούμενη πρόταση -λήμμα 1ο ότι η $f_x:\mathbb{R}\to X$ με $f_x(\lambda)=\lambda x$ είναι συνεχής έπεται ότι αφού και $f_x(0)=0\in Int(K)$ $\Rightarrow f_x^{-1}(Int K)\subseteq\mathbb{R}$ είναι ανοιχτό με $0\in f_x^{-1}(Int K)$ και άρα: $\exists\,\varepsilon_x>0$: $(-\varepsilon_x,\varepsilon_x)\subseteq f_x^{-1}(Int K) \Rightarrow \forall |t|<\varepsilon_x: f_x(t)=tx\in Int K\subseteq K$ και άρα το 0 είναι γεωμετρικό εσωτερικό του K

- Πρόταση: Έστω X τοπολογικός διανυσματικός χώρος και $K\subseteq X$ κυρτό με $0\in Int(K)$. Τότε το συναρτησιακό Minkowski ορίζεται και είναι συνεχές.

- Απόδειξη: Από προηγούμενη πρόταση -λήμμα 2ο έχουμε ότι το 0 είναι γεωμετρικό εσωτερικό του K και άρα από προηγούμενη πρόταση έπεται ότι το P_K ορίζεται. Τώρα για να αποδείξουμε ότι το P_K είναι συνεχές αρκεί να αποδείξουμε ότι: $\exists\, V$ ανοιχτή περιοχή του 0 με $P_K(V)$ [redacted] να είναι φραγμένο. ($\exists\, M>0: P_K(V)\subseteq(-M,M)$). Έστω τώρα: $V=int(K)$ $\subseteq K$ και έχουμε ότι $0\in V$ και άρα το V είναι ανοιχτή περιοχή του 0

$\Rightarrow \forall \mu \geq \frac{1}{s} : \mu x \notin \bar{K}$ (από προηγούμενο ισχυρισμό).

Τώρα: για $\tau = \frac{1}{\mu}$: $\forall\, 0 < t \leq s$: $\frac{x}{t} \notin \bar{K} \Rightarrow \{\tau > 0 : \frac{x}{\tau'} \in K\} \subseteq [s, +\infty)$

$\Rightarrow p_{\bar{K}}(x) \geq s$ και άρα έχουμε το ζητούμενο.

- <u>**Πόρισμα:**</u> Έστω X τοπολογικός διανυσματικός χώρος και $K \subseteq X$ κυρτό με $Int(K) \neq \emptyset$.
Τότε: $\overline{Int(K)} = \bar{K}$ και $(\bar{K})^{\circ} = int(\bar{K}) = int(K)$

- <u>**Απόδειξη:**</u> Χωρίς βλάβη της γενικότητας υποθέτουμε ότι: $0 \in Int(K)$ και τότε:

$\forall x \in X: \; x \in \overline{Int(K)} \iff p_{Int(K)}(x) \leq 1 \overset{p_K = p_{IntK}}{\iff} p_K(x) \leq 1 \iff x \in \bar{K}$ από πρόταση

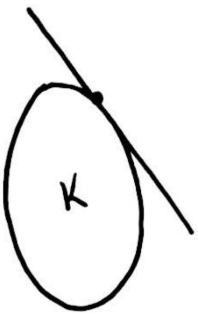
$\forall x \in X: \; x \in int(\bar{K}) \iff p_{\bar{K}}(x) < 1 \overset{p_K = p_{\bar{K}}}{\iff} p_K(x) < 1 \iff x \in Int(K)$ από πρόταση

- <u>**Ορισμός:**</u> Ένας τοπολογικός διανυσματικός χώρος X καλείται <u>τοπικά κυρτός</u> αν έχει βάση περιοχών $\mathcal{B}$ που αποτελείται από (ανοικτά) κυρτά σύνολα.

Ισοδύναμα: $\forall x \in X, \forall U \in \mathcal{N}_x : \exists\, x \in V \subseteq U$ με V ανοικτό και κυρτό

- <u>**Θεώρημα:**</u> (1^{o} Θεμελιώδες Διαχωριστικό Θεώρημα): Έστω X τοπολογικός διανυσματικός χώρος, $x \in X$, $K \subseteq X$ κυρτό με $\overset{Int(K) \neq \emptyset}{x \notin Int(K)}$. Τότε: $\exists\, f: X \to \mathbb{R}$ γραμμική και συνεχής με $\sup\limits_{y \in K} f(y) \leq f(x)$

- <u>**Συμβολισμός:**</u> Αν X τ.δ.χ τότε: $X^* = \{f: X \to \mathbb{R} \mid$ γραμμική και συνεχής$\}$



- Ανάλυση 2: Μάθημα 5ο: Δόξας:

- <u>Θεώρημα:</u> (Θεμελιώδες Διαχωριστικό θεώρημα).

Έστω X [redacted] τοπολογικός διανυσματικός χώρος και $K \subseteq X$ κυρτό, $x_0 \in X$, $Int(K) \neq \emptyset$, $x_0 \notin Int(K)$.

Τότε: $\exists f \in X^*$ με $f \neq 0$ τέτοιο ώστε: $\sup_{z \in K} f(z) \leq f(x_0)$.

- Απόδειξη: Χωρίς βλάβη της γενικότητας $0 \in Int(K)$: γιατί διαφορετικά έχουμε ότι αφού: $Int(K) \neq \emptyset \Rightarrow \exists y_0 \in Int(K)$ και αφού $x_0 \notin Int(K)$ έπεται ότι $y_0 \neq x_0$ και θέτουμε: $L = K - y_0$ και τότε έχουμε ότι $0 \in Int(L)$. Αφού τώρα το K είναι κυρτό και $0 \in Int(K)$ έπεται ότι το p_K είναι καλά ορισμένο, υπογραμμικό και συνεχές. Έστω τώρα: $Y = \langle \lambda x_0 : \lambda \in \mathbb{R} \rangle \hookrightarrow X$ και ορίζουμε $f : Y \to \mathbb{R}$ με $f(\lambda x_0) = \lambda$ και τότε έχουμε ότι το f είναι γραμμικό συναρτησοειδές και <u>ισχυρισμός</u>: [redacted] $f(y) \leq p_K(y)$, $\forall y \in Y$: γιατί έχουμε ότι αν $y = \lambda x_0$ για κάποιο $\lambda \in \mathbb{R}$ τότε: εάν: $\lambda \leq 0$: $f(y) = f(\lambda x_0) = \lambda \leq 0 \leq p_K(\lambda x) = p_K(y)$ και αν τώρα: $\lambda > 0$: τότε: έχουμε ότι αφού $x_0 \notin Int(K)$ έπεται ότι: $p_K(x_0) \geq 1$ και άρα: $f(y) = f(\lambda x_0) = \lambda \leq \lambda p_K(x_0) \overset{\text{υπογρ.}}{=} p_K(\lambda x_0) = p_K(y)$ και άρα τελικά: $f(y) \leq p_K(y)$, $\forall y \in Y$. Τώρα από Hahn-Banach έπεται ότι $\exists \tilde{f}$ [redacted] γραμμική απεικόνιση με $\tilde{f}|_Y = f$ και $\tilde{f}(x) \leq p_K(x)$, $\forall x \in X$. Τώρα:

<u>Ισχυρισμός:</u> $f \in X^*$ και $f \neq 0$: Παρατηρούμε ότι: $\tilde{f}(x_0) = f(x_0) = 1 \neq 0$ ($x_0 \in Y$) και άρα: $f \neq 0$.

Τώρα έστω $W = Int(K) \cap (-Int(K))$ και τότε έχουμε ότι το W είναι κυρτό ως τομή κυρτών, ανοιχτό ως τομή ανοιχτών, συμμετρικό με $0 \in W$. Θα αποδείξουμε ότι: $\forall x \in W$: $|\tilde{f}(x)| < 1 \Rightarrow \tilde{f}$: φραγμένο $\Rightarrow \tilde{f}$: συνεχές. Πράγματι αν $x \in W$: $\tilde{f}(x) \leq p_K(x) < 1$ αφού $x \in W \subseteq Int(K)$. Επιπλέον: $x \in$ [redacted] $-Int(K)$ και άρα έχουμε ότι: $\exists y \in Int(K)$: $x = -y$ και τότε έχουμε ότι: $\tilde{f}(x) = \tilde{f}(-y) = -\tilde{f}(y) \geq -p_K(y) > -1$ και άρα: $\forall x \in W$: $|\tilde{f}(x)| < 1$, και άρα έχουμε τον ισχυρισμό. Τώρα για κάθε $x \in Int(K)$: $\tilde{f}(x) \leq p_K(x) < 1 = \tilde{f}(x_0)$ και άρα έχουμε ότι: $Int(K) \subseteq \underbrace{\tilde{f}^{-1}((-\infty, 1])}_{\text{κλειστό ως αντίστροφη εικόνα κλειστού μέσω συνεχούς}} \Rightarrow \overline{Int(K)} = \overline{K} \subseteq \tilde{f}^{-1}((-\infty, 1])$

$\Rightarrow \sup_{x \in \overline{K}} f(x) \leq f(x_0)$

▸ **Θεώρημα:** (1ο διαχωριστικό θεώρημα με την ευρεία έννοια):

Έστω X τοπολογικός διανυσματικός χώρος, $K_1, K_2 \subseteq X$ κυρτά, $Int(K_1) \neq \emptyset$ και $K_2 \cap Int(K_1) = \emptyset$. Τότε: $\exists f \in X^*, f \neq 0$ με: $\sup_{x \in K_1} f(x) \le \inf_{y \in K_2} f(y)$

- **Απόδειξη:** Ορίζουμε $L = int(K_1) - K_2 = \bigcup_{z \in K_2} (Int(K_1) - z)$ και τότε παρατηρούμε ότι το L είναι κυρτό, ανοιχτό και $0 \notin L$ και άρα από το ΘΔΘ έχουμε ότι: $\exists f \in X^* : f \neq 0$ τέτοιο ώστε: $\sup_{w \in L} f(w) \le 0 \Rightarrow \sup_{x \in Int K_1, \, y \in K_2} (f(y) - f(y)) \le 0 \Rightarrow$ $\sup_{x \in Int K_1} f(x) \le \inf_{y \in K_2} f(y) = c_0$ και άρα έχουμε ότι: $Int(K_1) \subseteq \underbrace{f^{-1}((-\infty, c_0])}_{\text{κλειστό}}$

$\Rightarrow \overline{K_1} = \overline{Int(K_1)} \subseteq f^{-1}((-\infty, c_0]) \Rightarrow K_1 \subseteq \overline{K_1} \subseteq f^{-1}((-\infty, c_0])$ και άρα:

$\sup_{x \in K_1} f(x) \le c_0 = \inf_{y \in K_2} f(y)$ και άρα αποδείχτηκε.

▸ **Πρόταση:** Έστω X, Y τοπολογικοί χώροι και $f : X \to Y$ συνεχής. Αν $K \subseteq X$ συμπαγές τότε το $f(K) \subseteq Y$ είναι συμπαγές.

▸ **Παράδειγμα:** Έστω $0 < p < 1$ και $L^p([0,1]) = \{ f : [0,1] \to \mathbb{R} \mid \int_0^1 |f(t)|^p dt < \infty \}$

Αν $d : L^p \times L^p \to \mathbb{R}$ με $d(f,g) = \int_0^1 |f(t) - g(t)|^p dt$ τότε ο (L^p, d) είναι μετρικός χώρος και μάλιστα είναι διαχωρίσιμος, πλήρης και d είναι αναλλοίωτη μετρική, δηλαδή: $d(f+h, g+h) = d(f,g), \forall h \in L^p$. Θα αποδείξουμε ότι αν $0 \in V \subseteq L^p$ κυρτό και ανοιχτό τότε: $V = L^p$. Ειδικότερα: $(L^p)^* = \{0\}$.

- Πράγματι, έστω $0 \in V \subseteq L^p$ ανοιχτό και κυρτό και έστω τώρα $r > 0$ ώστε: $B_d(0,r) \subseteq V$. Έστω τώρα και $f \in L^p$ και θέτουμε: $\Delta(f) = d(0,f) = \int_0^1 |f(t)|^p dt$.

Αφού έχουμε ότι $p < 1$: $\exists n \in \mathbb{N} : n^{p-1} \Delta(f) < r$. Σταθεροποιούμε τέτοιο $n \geq 2$ και επιλέγουμε $0 = x_0 < x_1 < \dots < x_n = 1$ τ.ω: $\int_{x_i}^{x_{i+1}} |f(t)|^p dt = \frac{\Delta(f)}{n}, \forall i = 0, \dots, n-1$.

Για κάθε $i = 0, \dots, n-1$: θέτουμε: $g_i = n f \cdot \mathbb{1}_{[x_i, x_{i+1})}$ και τότε:

$f = \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} g_i$ και $\forall i = 0, \dots, n-1$, $d(g_i, 0) = \int_{x_i}^{x_{i+1}} n^p |f(t)|^p dt = n^{p-1} \Delta(f) < r$

και άρα: $g_0, \dots, g_{n-1} \in B_d(0,r) \subseteq V$ και άρα: $f \in V$ αφού είναι κυρτός συνδυασμός των g_i.

▸ **Λήμμα 10:** Έστω X τοπικά κυρτός και τοπολογικός διανυσματικός χώρος και $0 \in W \subseteq X$ ανοιχτό και κυρτό. Τότε $\exists\, V \subseteq W$ ανοιχτό, κυρτό, συμμετρικό $0 \in V$ και $V+V \subseteq W$.

- **Απόδειξη:** Από συνέχεια της "+" έχουμε ότι: $\exists\, V_1, V_2 \subseteq X$ ανοιχτά και κυρτά (αφού ο X είναι τοπικά κυρτός) με $0 \in V_1$, $0 \in V_2$ και $V_1 + V_2 \subseteq W$. Θέταμε τότε: $V = V_1 \cap (-V_1) \cap V_2 \cap (-V_2)$ και τότε έχουμε ότι αυτό είναι ανοιχτό, κυρτό, συμμετρικό, $0 \in V$ και $V+V \subseteq W$

- **Πόρισμα:** Αν W όπως πριν, τότε $\exists\, V \subseteq X$ ανοιχτό, κυρτό, συμμετρικό με $0 \in V$ και $V+V+V+V \subseteq W$.

▸ **Πρόταση:** Έστω X τοπικά κυρτός τοπολογικός διανυσματικός χώρος και $K \subseteq X$ συμπαγές και κυρτό, $F \subseteq X$ κλειστό και κυρτό με $K \cap F = \emptyset$. Τότε $\exists\, V$ ανοιχτή περιοχή του 0 που είναι και κυρτή και συμμετρική και $(K+V) \cap F = \emptyset$.

- **Απόδειξη:** $\forall x \in K$ έχουμε ότι $x \notin F \iff x \in F^c$ = ανοιχτό και άρα από το λήμμα για το $W = F^c - x \Rightarrow \exists\, V_x$ ανοιχτή, κυρτή, συμμετρική περιοχή του 0 με: $x + V_x + V_x \subseteq x + V_x + V_x + V_x + V_x \subseteq F^c$. Τότε: η οικογένεια $\{x + V_x : x \in K\}$ είναι ανοιχτό κάλυμμα του K και αφού το K είναι συμπαγές έστω $x_1 + V_{x_1}, x_2 + V_{x_2}, \dots, x_n + V_{x_n}$ πεπερασμένο υποκάλυμμα. Θέτουμε: $V = V_{x_1} \cap \dots \cap V_{x_n}$ και τότε $0 \in V$ και το V είναι ανοιχτή, κυρτή, συμμετρική περιοχή του 0. Επιπλέον: $(K+V) \cap F \subseteq$

$$\left(\bigcup_{i=1}^{n} (x_i + V_{x_i}) + V \right) \cap F = \left(\bigcup_{i=1}^{n} (x_i + V_{x_i} + V) \right) \cap F \subseteq \left(\bigcup_{i=1}^{n} (x_i + V_{x_i} + V_{x_i}) \right) \cap F \subseteq F^c \cap F = \emptyset$$

▸ **Θεώρημα:** (2ο Διαχωριστικό Θεώρημα): Έστω X τοπικά κυρτός τοπολογικός διανυσματικός χώρος και $K \subseteq X$ συμπαγές και κυρτό και $F \subseteq X$ κλειστό και κυρτό με $K \cap F = \emptyset$. Τότε: $\exists\, f \in X^*$: $f \neq 0$ τέτοιο ώστε: $\sup_{x \in K} f(x) < \inf_{y \in F} f(y)$

- <u>Απόδειξη</u>: Επιλέγουμε $0\in V$ ανοιχτή, κυρτή, συμμετρική περιοχή του 0 με $(K+V)\cap F=\emptyset$ από πρόταση. Τότε το $K+V$ είναι [redacted] κυρτό και από 1ο Διαχωριστικό Θεώρημα έχουμε ότι: $\exists f\in X^*$ με $f\neq 0$ τέτοιο ώστε: $\sup\limits_{w\in K+V} f(w) \le \inf\limits_{y\in F} f(y)$ και τώρα αφού η f είναι συνεχής και $K\subseteq X$ συμπαγές $\Rightarrow f(K)\subseteq \mathbb{R}$ είναι συμπαγές και άρα έχουμε ότι υπάρχει το $\max f(K)$, δηλαδή: $\exists x_0\in K$ τέτοιο ώστε: $f(x_0)\geq f(x)$ $\forall x\in K$. Επιπλέον: $f\neq 0$ και άρα: $\exists z\in V$: $f(z)>0$: Πράγματι [redacted]: $\exists z_1\in V$ $f(z_1)\neq 0$ (Αν όχι $f|_V=0 \Rightarrow f|_{\lambda V}=0$, $\forall \lambda>0$ και αφού όμως: $0\in \text{Int}(V)=V$ έπεται ότι το 0 είναι γεωμετρικό εσωτερικό του V από πρόταση $\Rightarrow \bigcup\limits_{\lambda>0}\lambda V=X$ $\Rightarrow f|_X=0 \Rightarrow f=0$, άτοπο αφού: $f\neq 0$). Αν τώρα: $f(z_1)>0$ τότε OK. Αλλιώς: $-z_1\in V$ αφού το V είναι συμμετρικό και $f(-z_1)=-f(z_1)>0$. Τότε:

$$\sup_{x\in K} f(x) \le f(x_0) < f(x_0)+f(z) = f(x_0+z) \le \sup_{w\in K+V} f(w) \le \inf_{y\in F} f(y)$$