(9)

• <u>για το επί</u>: Αφού X είναι κατά τόπο απλά συνεκτικός (δηλ. $\forall H \leq \pi_1(X, x_0)$ υπάρχει $\widetilde{X}_H \dots$)

<u>Μάθημα 17ο</u> (03/05/2023)

(1) $P_1 : \widetilde{X}_1 \to X$, $P_2 : \widetilde{X}_2 \to X$

επικαλύψεις του X και $\varphi : \widetilde{X}_1 \to \widetilde{X}_2$ ομομορφ. επικ. $\to$ φ είναι απ. επικάλυψης.

$$
\begin{tikzcd}
X_2 \arrow[dr, "P_2"'] & & X_1 \arrow[ll, leftrightarrow, "\varphi"'] \arrow[dl, "P_1"] \\
& X \arrow[u, phantom, "G"] &
\end{tikzcd}
$$

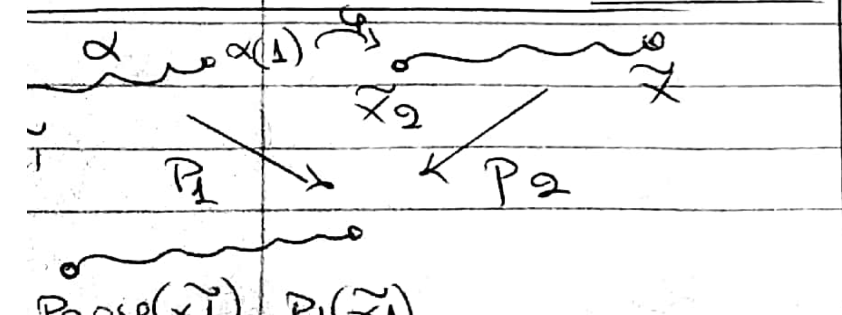
* $X, \widetilde{X}_1, \widetilde{X}_2$ κ.τ.σ., τ.κ.τ.σ.

<u>απόδειξη</u>

Έστω $\tilde{x}_1 \in \widetilde{X}_1$ και $\tilde{x}_2 = \varphi(\tilde{x}_1)$

• Ν.δ.ο. φ είναι επί

Έστω $\tilde{x} \in \widetilde{X}_2$ και γ μονοπάτι από το $\tilde{x}_2$ στο $\tilde{x}_1$



Έστω $\tilde{\alpha}$ P_1-ανύψωση του $P_2 \circ \gamma$ με αρχή το $\tilde{x}_1$

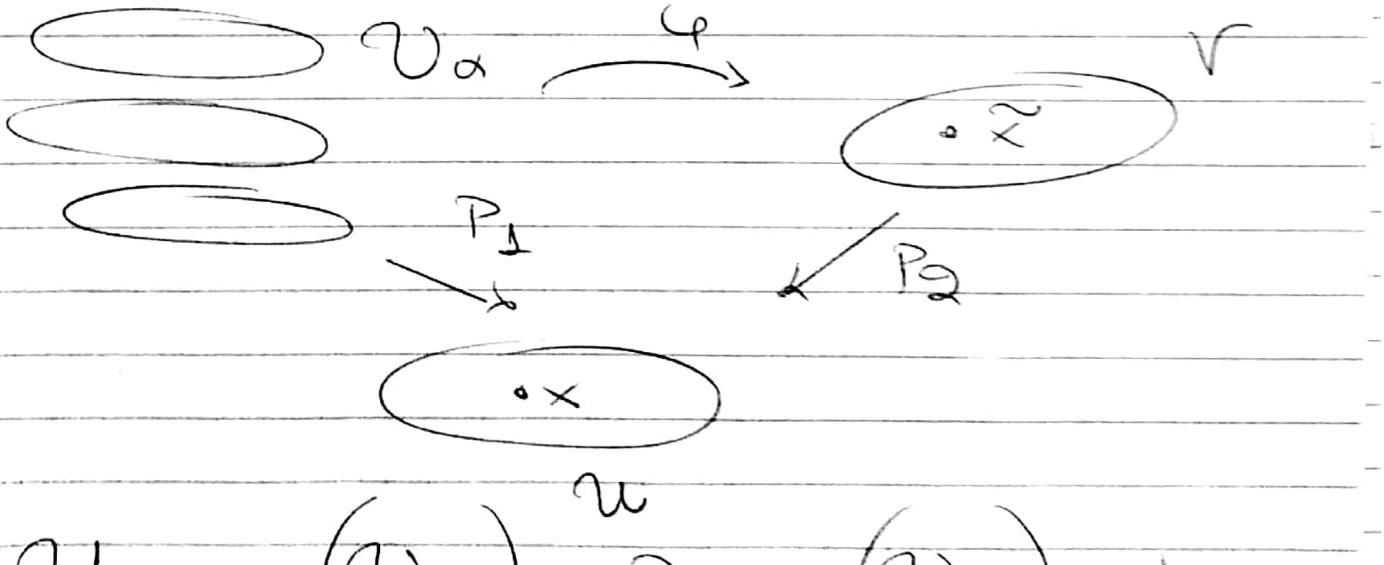
Τότε $\varphi \circ \tilde{\alpha}, \gamma$ ανυψώσεις του $P_2 \circ \gamma$ με την ίδια αρχή.

$\Rightarrow \varphi \circ \tilde{\alpha} = \gamma \Rightarrow \tilde{x} = \varphi(\tilde{\alpha}(1))$

$\Rightarrow \varphi$ επί.

<u>φ επικάλυψη:</u> Έστω $\tilde{x} \in X_2$ και $x = P_2(\tilde{x})$. Επειδή X τ.κ.τ.σ. υπάρχει κ.τ.σ. περιοχή U του x η οποία είναι P_1-σ.π και P_2-σ.π.

Έστω V η συνιστώσα του $P^{-1}(U)$ που περιέχει το $\tilde{x}$. Θδο V είναι φ-σ.π. του $\tilde{x}$.



$U = P_1(V_\alpha) = P_2 \circ \varphi(V_\alpha) \Rightarrow$

$\varphi(V_\alpha) \subseteq P_2^{-1}(U)$. Επειδή

V_α κ.τ.σ. $(V_\alpha \cong U) \Rightarrow \varphi(V_\alpha)$

κ.τ.σ., άρα περιέχεται σε κάποια.

συνιστώσα του $p^{-1}(\mathcal{U})$.

- $\bigsqcup_{\alpha} V_\alpha = p_1^{-1}(\mathcal{U}) = (p_2 \circ \varphi)^{-1}(\mathcal{U})$

$= \varphi^{-1}\left(p_2^{-1}(\mathcal{U})\right) = \varphi^{-1}\left(\bigsqcup_{\sigma} V^{\sigma}\right)$

$\to \varphi^{-1}(V) = \bigsqcup \left[V_\alpha \cap \varphi^{-1}(V)\right]$

(α) αν $V_\alpha \cap \varphi^{-1}(V) = \emptyset$ ✓

(β) αν $V_\alpha \cap \varphi^{-1}(V) \neq \emptyset \xrightarrow[\text{παρατήρηση}]{\text{προηγ}}$

$V_\alpha \subseteq \varphi^{-1}(V)$, άρα

$V_\alpha \cap \varphi^{-1}(V) = V_\alpha \longrightarrow$

$\varphi^{-1}(V) = \bigsqcup V_\alpha$, $V_\alpha \cap \varphi^{-1}(V) \neq$

- Το ότι ο περιορισμός $\varphi|_{V_\alpha} : V_\alpha \to V$ είναι ομοιομορφισμός έπεται από το ακόλουθο διάγραμμα:

$$\begin{tikzcd}
V_\alpha \arrow[rr, "\varphi|_{V_\alpha}"] \arrow[dr, "p_1|_{V_\alpha}"', "\cong"] & G & V \arrow[dl, "p_2|"', "\cong"] \\
& \mathcal{U} &
\end{tikzcd}$$

④

<u>Πρόταση</u> Έστω $p : \tilde{X} \to X$ επικάλ. στην $\tilde{X}$ απλά συνεκτικός.

Αν $p_1 : \tilde{X}_1 \to X$ είναι μια άλλη επικ. τότε υπάρχει επικ. $p_2 : \tilde{X} \to \tilde{X}_1$

<u>απόδειξη</u>

$$\begin{tikzcd}
\tilde{X}_1 \arrow[r, "p_1"] & X \\
 & \tilde{X} \arrow[u, "p"'] \arrow[ul, dashed, "p_2"] \arrow[ul, phantom, "G", shift left=4]
\end{tikzcd}$$

Ο $\tilde{X}$ είναι απλά συνεκτικός άρα από κρ. ανυψώσεως υπάρχει ομομορφ. επικ. $p_2 : \tilde{X} \to X$

Από προηγ. λήμμα p_2 επικάλ. □

Άρα ένας απλά συνεκτικός χώρος επικάλυψης του X επικαλύπτει κάθε άλλο χώρο επικ. του X.

Ένας απλά συνεκτικός χώρος επικ. του X λέγεται <u>καθολικός χώρος</u> επικ. του X.

Είναι άμεσο ότι απλά συν. χώροι επικ. είναι <u>ισόμορφοι</u>.

Μετασχηματισμοί Επικαλύψεων.

Έστω $p : \tilde{X} \to X$ μια επικ. του X.

(5)

Ένας <u>μετασχηματισμός</u> (ή <u>αυτομορφισμός</u>) ~~του X~~ της επικάλυψης είναι ένας ισομορφ. επικαλ. $\varphi: \tilde{X} \to \tilde{X}$ τ.ω. το ακόλουθο διαγρ. να είναι μεταθ.

$$\begin{tikzcd} \tilde{X} \arrow[rr, "\varphi"] \arrow[dr, "p"'] & & \tilde{X} \arrow[dl, "p"] \\ & X & \end{tikzcd}$$

Οι μετασχηματισμοί της επικάλυψης $p: \tilde{X} \to X$ αποτελούν ομάδα με πράξη την σύνθεση.

<u>Συμβ</u> $G(\tilde{X}, p)$, ή $Aut(\tilde{X}, p)$ ή πιο απλά $G(\tilde{X})$.

<u>Παρατήρηση</u>: κάθε $\varphi \in G(\tilde{X})$ είναι ανύψωση της p. Αυτό έχει ως συνέπεια, ο φ να καθορίζεται πλήρως από την εικόνα $\varphi(\tilde{x})$ σε ένα μόνο σημείο.

Δηλ. αν $\varphi_1, \varphi_2 \in G(\tilde{X})$ και $\varphi_1(\tilde{x}) = \varphi_2(\tilde{x}) \to \varphi_1 = \varphi_2$

* Αρκεί $\tilde{X}$ συνεκτικός

<u>Ορσ.</u> Μια επικαλ. $p: \tilde{X} \to X$ λέγεται <u>κανονική</u> αν η $G(\tilde{X})$ δρα <u>μεταβατικά</u> στο νήμα $p^{-1}(x)$, $\forall x \in X$

Δηλ. $\forall x \in X$ και $\forall \tilde{x}_1, \tilde{x}_2 \in p^{-1}(x)$ υπάρχει $\varphi \in G(\tilde{X})$: $\varphi(\tilde{x}_1) = \tilde{x}_2$.

<u>Πρόταση</u> Έστω $p : \tilde{X} \to X$, $x_0 \in X$ και $\tilde{x}_0 \in p^{-1}(x_0)$, όπου $\tilde{X}$ κ.τ.σ. και X κ.τ.σ. και τ.κ.τ.σ. και

$$H = p_*\left(\pi_1\left(\tilde{X}, \tilde{x}_0\right)\right) \leq \pi_1(X, x_0)$$

Τότε:

$p : \tilde{X} \to X$ κανονική $\Leftrightarrow$
$H \trianglelefteq \pi_1(X, x_0)$.

Η ομάδα $G(\tilde{X})$ είναι ισόμορφη με την ομάδα $N(H)/H$, όπου $N(H)$ η κανονικοποιούσα της H στην $\pi_1(X, x_0)$. Συνεπώς, αν p κανονική

$$G(\tilde{X}) \cong \pi_1(X, x_0)/H$$

<u>Πριν</u> Έχουμε δείξει ότι

$$Cl_G(H) = \left\{ p_*\left[\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x})\right] \,\middle|\, \tilde{x} \in p^{-1}(x_0) \right\}.$$

κανονική $\Leftrightarrow$ $Cl_G(H)$ μονοσύνολο,

$\Leftrightarrow$ $p_* \pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_1) = p_* \pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_2)$

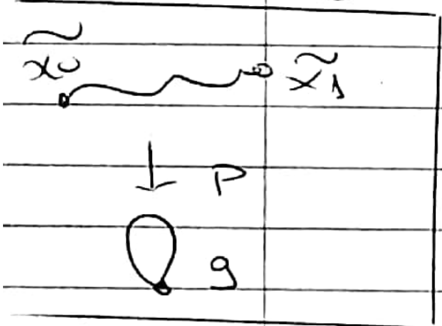
$\forall \tilde{x}_1, \tilde{x}_2 \in p^{-1}(x_0)$

(7)

Άρα υπάρχει $\varphi \in G(\tilde{X}) : \varphi(\tilde{x}_1) = \varphi(\tilde{x}_2$

$\forall\ \tilde{x}_1, \tilde{x}_2 \in p^{-1}(x_0)$

(2) Ορίζουμε $\varphi : N(H) \to G(\tilde{X})$ ως εξής: Έστω $[g] \in N(H)$ θηλειά στο x_0. Θεωρούμε $\tilde{g}$ ανύψωση της g με αρχή $\tilde{x}_0$.



Τώρα, $[g] \in N(H)$

$P_* \pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0) = [g]\, P_* \pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0)[g]^{-1}$

Όμως

$[g]\, P_*[\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0)][g]^{-1} = P_*[\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_1)]$

$\Rightarrow P_*[\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_1)] = P_*[\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0)]$

$\Rightarrow \exists\ \varphi_g \in G(\tilde{X}) : \varphi_g(\tilde{x}_0) = \tilde{x}_1$.

Ορίζουμε $\varphi(g) = \varphi_g$.

(α) η φ_g δεν εξαρτάται από την επιλογή της $[g]$. Αν $f \simeq g$

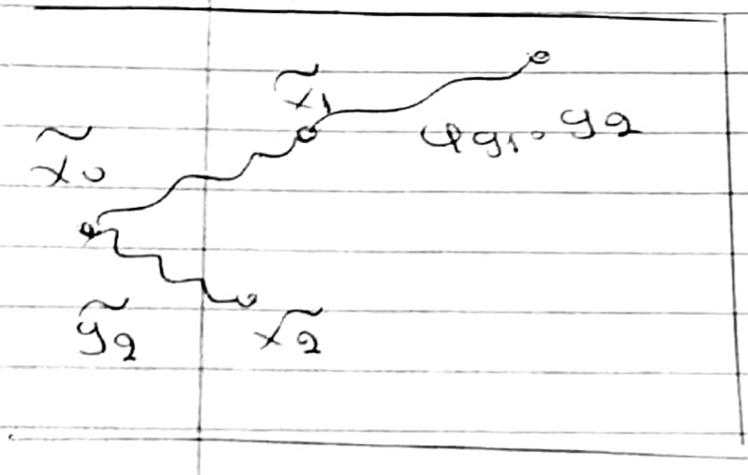
$\Rightarrow \tilde{f} \simeq \tilde{g}$ (όπως πριν)

$\Rightarrow \tilde{f}(1) = \tilde{g}(1)$.

(β) <u>φ ομομορφισμός</u> <u>ομάδων</u>:

$[g_1], [g_2] \in N(H)$. Θέλω:

$$\varphi_{g_1 g_2} = \varphi_{g_1} \circ \varphi_{g_2}.$$



Έστω $\tilde{g}_1, \tilde{g}_2$ όπως ορσ. Εφόσον $\varphi_{g_1}(\tilde{x}_0) = \tilde{x}_1$ ορίζεται μονοπάτι $\tilde{g}_1 \cdot (\varphi_{g_1} \circ \tilde{g}_2)$

το οποίο είναι ανύψωση του $g_1 g_2$ με αρχή το $\tilde{x}_0$.

Άρα $\varphi_{g_1 g_2}(\tilde{x}_0) = \tilde{g}_1 (\varphi_{g_1} \circ \tilde{g}_2)(1)$

$= \varphi_{g_1} \tilde{g}_2(1) = \varphi_{g_1} \circ \varphi_{g_2}(\tilde{x}_0)$.

παρόμοια

$\Rightarrow \varphi_{g_1 g_2} = \varphi_{g_1} \circ \varphi_{g_2}$.

(γ) <u>φ επί</u>: Έστω $\vartheta \in G(\tilde{x})$ και

$\tilde{x}_1 = \vartheta(\tilde{x}_0)$. Θεωρούμε μονοπάτι $\tilde{g}$ από το $\tilde{x}_0 \rightsquigarrow \tilde{x}_1$. Εφόσον $\tilde{x}_1 \in p^{-1}(x_0)$ και $\vartheta \in G(\tilde{x}) \rightsquigarrow \varphi_g = \vartheta$ όπου $g = p \circ \tilde{g}$

⑨

- $[g] \in N(H)$: $g(\tilde{x}_0) = \tilde{x}_1 \Rightarrow$

$p_* \pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0) = p_* \pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_1)$

Από την άλλη:

$[g]\, p_* \pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_1)\, [g]^{-1} = p_*[\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0)]$

$\Rightarrow [g] \in N(H)$.

(δ) <u>$\ker\varphi = j$</u>: $[g] \in \ker\varphi \Leftrightarrow$

$\varphi_g = id \Leftrightarrow \tilde{g}$ σημεία στο x_0

$\Leftrightarrow [g] \in \operatorname{Im} p_* = H$

$\square$