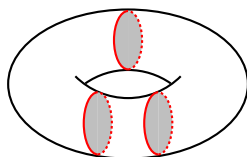


## Αλγεβρική Τοπολογία 2023

1. Έστω  $X$  ένας τοπολογικός χώρος και  $f, g : X \rightarrow S^2$  δύο συνεχείς απεικονίσεις. [2]
  - (i) Αν  $f(x) \neq -g(x)$  για κάθε  $x \in X$ , τότε οι  $f$  και  $g$  είναι ομοτοπικές.
  - (ii) Αν η  $f$  δεν είναι επί, τότε είναι ομοτοπική με σταθερή απεικόνιση.
  
2. (i) Δώστε παράδειγμα δύο χώρων που είναι ομοτοπικά ισοδύναμοι αλλά όχι ομοιομορφικοί (εξηγήστε). [2]
  - (ii) Έστω  $r : X \rightarrow A$  συστολή (retraction) από έναν χώρο  $X$  σε έναν υπόχωρο  $A$ . Αν ο  $X$  είναι συμπτύξιμος, τότε και ο  $A$  είναι συμπτύξιμος.
  
3. (i) Υποθέτουμε ότι ένας χώρος  $X$  έχει συμπαγές καθολικό κάλυμμα (δηλ. επικαλύπτεται από έναν συμπαγή απλά συνεκτικό χώρο). Αποδείξτε ότι η ομάδα  $\pi_1(X, x_0)$ , όπου  $x_0 \in X$ , είναι πεπερασμένη. (Οι χώροι θεωρούνται κατά τόξα συνεκτικοί) [2]
  - (ii) Ποιό είναι το πλήθος των μη ισόμορφων επικαλύψεων δείκτου 4 του χώρου  $X = S^3 \times S^1$ ;
  
4. (i) Έστω  $X$  ένας κατά τόξα συνεκτικός, τοπικά κατά τόξα συνεκτικός και απλά συνεκτικός χώρος. Έστω  $p : \tilde{Y} \rightarrow Y$  μια επικάλυψη, όπου ο  $\tilde{Y}$  είναι συμπτύξιμος χώρος. Αποδείξτε ότι κάθε συνεχής απεικόνιση  $f : X \rightarrow Y$  επάγει μηδενικές απεικονίσεις στις ομάδες ανηγμένης ομολογίας, δηλ. κάθε  $\tilde{H}_n(f) : \tilde{H}_n(X) \rightarrow \tilde{H}_n(Y)$  είναι η μηδενική απεικόνιση. [2]
  - (ii) Έστω  $X$  ένα πεπερασμένο γράφημα. Υπολογίστε τις ομάδες ομολογίας του χώρου  $Y$  (συναρτήσει των ομάδων ομολογίας του  $X$ ) που προκύπτει αν επισυνάψουμε ένα κελί διάστασης 3 στο  $X$ .
  
5. (i) Διατυπώστε και αποδείξτε το θεώρημα σταθερού σημείου του Brouwer για τον κλειστό μοναδιαίο “δίσκο”  $D^n$ . [2]
  - (ii) Υπολογίστε την θεμελιώδη ομάδα του χώρου που προκύπτει από την σπείρα  $T = S^1 \times S^1$  επισυνάπτοντας τρεις δίσκους κατά μήκος κύκλων  $\{x_0\} \times S^1$ ,  $\{x_1\} \times S^1$  και  $\{x_2\} \times S^1$  όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα.



6. Έστω  $X$  ένα σύμπλεγμα κελιών αποτελούμενο από μια κορυφή  $v$ , δύο ακμές  $\alpha, \beta$  των οποίων τα άκρα επισυνάπτονται στην κορυφή, και δύο 2-κελιά  $f_1, f_2$  τα οποία επισυνάπτονται κατά μήκος των μονοπατιών  $\alpha\beta^2$  και  $\beta\alpha^2$ , αντίστοιχα. Να υπολογισθεί η θεμελιώδης ομάδα του χώρου  $X$ . Είναι άπειρη ή πεπερασμένη ομάδα; [1.5]