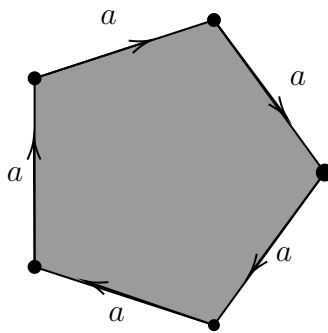


### Αλγεβρική Τοπολογία Ιούνιος 2023

1. Αποδείξτε ότι κάθε συνεχής απεικόνιση  $f: \mathbb{R}P^3 \times \mathbb{S}^2 \rightarrow \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$  είναι ομοτοπική με σταθερή απεικόνιση. Ισχύει το συμπέρασμα αν ο χώρος  $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$  αντικατασταθεί με την σφήνα  $\mathbb{S}^1 \vee \mathbb{S}^1$  ;
2. (α) Η θεμελιώδης ομάδα ενός κατά τόξα συνεκτικού, τοπικά κατά τόξα συνεκτικού και ημιτοπικά απλά συνεκτικού χώρου  $X$  είναι τάξεως 11. Πόσους κατά τόξα συνεκτικούς χώρους επικάλυψης (ως προς ισομορφισμό) έχει ο  $\tilde{X}$  ;  
(β) Δίνεται επικάλυψη της σπείρας  $p: \tilde{X} \rightarrow \mathbb{T} = \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$ , όπου ο χώρος  $\tilde{X}$  είναι κατά τόξα συνεκτικός και τοπικά κατά τόξα συνεκτικός. Θεωρούμε θηλειά  $f: I \rightarrow X$  στο  $x_0 \in \mathbb{T}$  και δύο ανυψώσεις  $\tilde{f}, \tilde{g}$  αυτής. Δείξτε ότι το μονοπάτι  $\tilde{f}$  είναι κλειστό (θηλειά) αν και μόνο αν το μονοπάτι  $\tilde{g}$  είναι κλειστό.
3. (α) Έστω  $X$  μια συνεκτική τοπολογική πολλαπλότητα διάστασης  $n \geq 3$ . Αποδείξτε ότι, για κάθε  $x \in X$ , έχουμε ισομορφισμό  $\pi_1(X \setminus \{x\}) \cong \pi_1(X)$ .  
(β) Υπολογίστε την θεμελιώδη ομάδα του χώρου πηλίκου που προκύπτει από ένα κανονικό πεντάγωνο ταυτοποιώντας τις πλευρές του όπως στο παρακάτω σχήμα.



4. Αποδείξτε ότι δεν υπάρχει ομοιομορφισμός  $f: \mathbb{R}^2 \setminus \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{R}^2 \setminus \mathbb{S}^1$  τέτοιος ώστε  $f(0,0) = (4,0)$ .
5. Υπολογίστε τις ομάδες ομολογίας της σφήνας  $\mathbb{S}^2 \vee \mathbb{S}^1$ .

**Απαντήστε σε όλα τα ερωτήματα.**

**Καλή επιτυχία.**