Διαφορική Γεωμετρία 1
Εξέταση Φεβρουαρίου 2021

ΘΕΜΑ 1 (5 μονάδες) Θεωρήστε τα παρακάτω διανυσματικά πεδία στον $\mathbb{R}^3$

$$V = \frac{\partial}{\partial x} + 2x\frac{\partial}{\partial z},$$
$$W = \frac{\partial}{\partial y} + 2y\frac{\partial}{\partial z}.$$

1. (1.5 μονάδες) Να υπολογίσετε τις διαφορικές ροές Φ και Ψ των V και W αντίστοιχα. Είναι τα V, W πλήρη;

2. (1 μονάδα) Να υπολογίσετε την αγκύλη Lie $[V, W]$.

3. (1.5 μονάδες) Υπάρχει σύστημα συντεταγμένων (U, φ), $\varphi(p) = (x^1(p), x^2(p), x^3(p))$ του $\mathbb{R}^3$ ώστε
$$\frac{\partial}{\partial x_1} = V, \quad \frac{\partial}{\partial x_2} = W$$
στο U; Αν ναι, να το βρείτε.

4. (1 μονάδα) Έστω D η κατανομή διάστασης 2 του $\mathbb{R}^3$ με
$$D_{(x,y,z)} = \text{span}\,(V, W)\,.$$
   (α΄) Είναι η D involutive;

   (β΄) Έστω $p = (c_1, c_2, c_3) \in \mathbb{R}^3$. Υπάρχει ολοκληρωτική υποπολλαπλότητα της D που να περιέχει το p; Αν ναι, να την βρείτε.

ΘΕΜΑ 2 (2.5 μονάδες) Έστω M, N διαφορικές πολλαπλότητα και $F : M \to N$ μια ομαλή απεικόνιση. Έστω X, Y ομαλά διανυσματικά πεδία στην M και N αντίστοιχα, και ότι το Y είναι F-συσχετισμένο με το X. Αν Φ_t, Ψ_s είναι οι διαφορικές ροές των X και Y αντίστοιχα να δείξετε ότι

$$\Psi_s \circ F = F \circ \Phi_t.$$

ΘΕΜΑ 3 (2.5 μονάδες) Έστω E μια διανυσματική δέσμη πάνω από την διαφορική πολλαπλότητα M, και $\pi : E \to M$ η αντίστοιχη απεικόνιση προβολής. Να αποδείξετε ότι η π είναι submersion.

ΘΕΜΑ 4 (2.5 μονάδες) Θεωρήστε την 1-μορφή $\omega = \frac{1}{x}dx + dy$ στο $U = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x > 0\}$.

1. Να εξετάσετε αν η ω είναι κλειστή.

2. Αν $\gamma : [0, 2\pi] \to U$ και $\sigma : [0, 1] \to U$ είναι οι καμπύλες
$$\gamma(t) = (2 + \cos t, \sin t),$$
$$\sigma(t) = (2 + t, t)$$
να υπολογίσετε τα ολοκλήρωματα $\int_\sigma \omega$ και $\int_\gamma \omega$.