Ανάλυση I — 22-2-2019

1. Έστω μ^* εξωτερικό μέτρο στο X. Αν $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ είναι μια αύξουσα ακολουθία μ^*-μετρήσιμων υποσυνόλων του X, αποδείξτε ότι για κάθε $E \subseteq X$ ισχύει

$$\lim_{n\to\infty} \mu^*(A_n \cap E) = \mu^*\Big(\bigcup_{n=1}^{\infty}(A_n \cap E)\Big).$$

2. Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ Lebesgue μετρήσιμη συνάρτηση και $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση με την ακόλουθη ιδιότητα: αν $N \subseteq \mathbb{R}$ και $m(N) = 0$ τότε το $\varphi^{-1}(N)$ είναι Lebesgue μετρήσιμο σύνολο. Αποδείξτε ότι η $f \circ \varphi$ είναι Lebesgue μετρήσιμη.

3. Έστω E Lebesgue μετρήσιμο υποσύνολο του $\mathbb{R}$ με $m(E) < \infty$ και $f : E \to \mathbb{R}$ μετρήσιμη συνάρτηση. Αποδείξτε ότι για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει κλειστό σύνολο $F \subseteq E$ τέτοιο ώστε $m(E \setminus F) < \varepsilon$ και η f είναι φραγμένη στο F.

4. Έστω $(X, \mathcal{M}, \mu)$ πεπερασμένος χώρος μέτρου και $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ ακολουθία μετρήσιμων συναρτήσεων $f_n : X \to \mathbb{R}$. Αποδείξτε ότι αν $f_n \to 0$ κατά σημείο τότε $f_n \to 0$ κατά μέτρο.

5. Έστω ν πεπερασμένο μέτρο και μ μέτρο στον $(X, \mathcal{M})$. Αποδείξτε ότι $\nu \ll \mu$ αν και μόνο αν για κάθε ακολουθία $\{E_n\} \subset \mathcal{M}$ με $\mu(E_n) \to 0$ ισχύει $\nu(E_n) \to 0$.

6. Έστω $1 \leqslant p \leqslant \infty$ και $f \in L^p[0, \infty)$. Αποδείξτε ότι

$$\int_0^{\infty} f(x) e^{-nx}\, dx \to 0.$$

7. Δίνονται Lebesgue μετρήσιμες συναρτήσεις $g_n : [0, 1] \to \mathbb{R}$ με τις εξής ιδιότητες:

(α) Υπάρχει σταθερά $C > 0$ τέτοια ώστε $|g_n(x)| \leqslant C$ για κάθε $n \geqslant 1$ και $x \in [0, 1]$.

(β) Για κάθε $\alpha \in [0, 1]$ ισχύει

$$\int_0^{\alpha} g_n(x)\, dx \to 0.$$

Αποδείξτε ότι, για κάθε $f \in L_1[0, 1]$ ισχύει

$$\int_0^1 f(x) g_n(x)\, dx \to 0.$$

8. Έστω μ και ν δύο σ-πεπερασμένα μέτρα στον μετρήσιμο χώρο $(X, \mathcal{M})$. Αποδείξτε ότι υπάρχει μετρήσιμη συνάρτηση $f : X \to \mathbb{R}$ τέτοια ώστε, για κάθε $E \in \mathcal{M}$,

$$\int_E (1 - f)\, d\mu = \int_E f\, d\nu.$$

9. Έστω E Lebesgue μετρήσιμο υποσύνολο του $[0, 1]$ με $m(E) > 0$.

(i) Αποδείξτε ότι η $\chi_E * \chi_E$ είναι συνεχής συνάρτηση.

(ii) Αποδείξτε ότι υπάρχει $\varepsilon > 0$ ώστε: αν $|x| < \varepsilon$ τότε $m(E \cap (E + x)) > 0$.

10. Έστω E Lebesgue μετρήσιμο υποσύνολο του $\mathbb{R}$ με $0 < m(E) < \infty$. Έστω $f_n \in L^1(E)$ που ικανοποιούν τα εξής:

(α) Υπάρχουν $1 < p < \infty$ και $\alpha > 0$ τέτοια ώστε $\|f_n\|_p \leqslant \alpha$ για κάθε $n \geqslant 1$.

(β) Υπάρχει μετρήσιμη συνάρτηση f στο E τέτοια ώστε $f_n \to f$ σχεδόν παντού.

Αποδείξτε ότι $f \in L^1(E)$ και $\|f_n - f\|_1 \to 0$.

11. Σωστό ή λάθος; Έστω $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}^+$ Lebesgue μετρήσιμες συναρτήσεις τέτοιες ώστε $f_n \to 0$ κατά σημείο και

$$\int_{[0,1]} f_n \, dm = 1$$

για κάθε $n \geqslant 1$. Τότε,

$$\int_{[0,1]} \left(\sup_n f_n\right) dm = \infty$$

12. Έστω $(X, \mathcal{M}, \mu)$ χώρος μέτρου με $\mu(X) = 1$. Δίνονται $f_n \in L^2(\mu)$ και $\alpha > 0$ ώστε

$$1 \leqslant \|f_n\|_2 \leqslant \frac{1}{\alpha}\|f_n\|_1$$

για κάθε $n \geqslant 1$. Αποδείξτε ότι

$$\mu(\{x \in X : |f_n(x)| \geqslant \alpha/2 \text{ για άπειρες τιμές του } n\}) \geqslant \frac{\alpha^2}{4}.$$