

## Άλγεβρα Ι - 4 Φεβρουαρίου 2023

Όνομ/μο: \_\_\_\_\_

1. Ταξινομήστε (ως προς ισομορφισμό) τις ομάδες τάξεως 28. Είναι κάθε ομάδα τάξεως 28 μηδενοδύναμη ;
2. (α') Έστω  $G$  μια πεπερασμένη ομάδα τάξεως 55 η οποία δρα επί ενός συνόλου  $X$  με  $|X| = 23$ . Αποδείξτε ότι υπάρχει  $x \in X$  τέτοιο ώστε  $gx = x$ , για κάθε  $g \in G$ .  
(β') Μια άπειρη ομάδα η οποία περιέχει μη - τετριμμένο στοιχείο με πεπερασμένο το πλήθος συζυγή δεν είναι απλή.
3. (α') Μια ομάδα τάξεως 108 είναι επιλύσιμη.  
(β') Έστω  $G$  μια πεπερασμένη ομάδα τάξεως 203. Κάθε κανονική υποομάδα  $N$  της  $G$  τάξεως 7 περιέχεται στο κέντρο της  $G$ .
4. Έστω  $G$  μια μηδενοδύναμη ομάδα.

(α') Αν ο  $f: G \rightarrow K$  είναι ένας επιμορφισμός ομάδων και

$$1 = G_0 \triangleleft G_1 \triangleleft \cdots \triangleleft G_{n-1} \triangleleft G_n = G$$

είναι μια κεντρική σειρά της  $G$ , τότε η σειρά

$$1 = f(G_0) \leq f(G_1) \leq \cdots \leq f(G_{n-1}) \leq f(G_n) = f(G) = K$$

είναι μια κεντρική σειρά της  $K$ .

- (β') Αν η  $G$  είναι μηδενοδύναμη κλάσεως  $c$ , τότε η ομάδα πηλίκο  $G/Z(G)$  είναι μηδενοδύναμη κλάσεως  $\leq c - 1$ .
- (γ') Αν η  $G/G'$  είναι κυκλική, τότε η  $G$  είναι αβελιανή (και άρα κυκλική).
5. (α') Μπορεί η ομάδα  $F_2 * (\mathbb{Z} \times \mathbb{Z})$  να παραχθεί από τρία στοιχεία ;  
(β') Έστω  $G = \text{SL}_2(\mathbb{C})$  και  $g_1 = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ ,  $g_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ b & 0 \end{pmatrix}$  δύο στοιχεία της  $G$ . Αν  $|a|, |b| \geq 2$ , τότε τα  $g_1, g_2$  παράγουν μια ελεύθερη υποομάδα της  $G$  διάστασης 2.
  6. Έστω  $G = G_1 *_A G_2$  και  $H_1, H_2$  υποομάδες των  $G_1, G_2$ , αντίστοιχα, με  $H_1 \cap A = H_2 \cap A = 1$ . Να δειχθεί ότι η υποομάδα της  $G$  που παράγεται από τις (εικόνες των)  $H_1$  και  $H_2$  είναι ισόμορφη με το ελεύθερό τους γινόμενο. Δηλαδή,  $\langle H_1, H_2 \rangle \cong H_1 * H_2$ .