Μεταπτυχιακή Άλγεβρα ΙΙ - Ιούνιος 2019

Επιμέλεια Λύσεων : Κωνσταντίνος Μπιζάνος

1. Έστω R δακτύλιος, M ένα απλό R - πρότυπο, $n \in \mathbb{N}$ και N ένα υποπρότυπο του M^n. Να δείξετε ότι :

   (α′) (1 μονάδα) Κάθε απλό υποπρότυπο του N είναι ισόμορφο με το M.

   (β′) (1 μονάδα) Υπάρχει φυσικός αριθμός k με $k \leq n$ τέτοιος ώστε $N \cong M^k$.

Λύση. Θα σημειώσουμε μια γενικότερη παρατήρηση. Αν $N \leq M^n$, τότε $N = N_1 \times \cdots N_n$, όπου $N_i \leq M$. Επομένως, ισχύει ότι $N_i = 0$ ή M.

(α) Όμοια με την παρατήρηση, αν $0 \neq K \leq N$, απλό υποπρότυπο, τότε $K \leq M^n$ απλό R - υποπρότυπο. Συνεπώς, από την προηγούμενη παρατήρηση έχουμε ότι $K = \prod_{i=1}^{n} K_i$ και μάλιστα υπάρχει τουλάχιστον ένα j ώστε $K_j = M$ (αφού $K \neq 0$) και για την ακρίβεια υπάρχει ακριβώς ένα j ώστε $K_j = M$, αφού το K είναι απλό.

(β) Το ζητούμενο έπεται άμεσα από την παρατήρηση, αν $k = \operatorname{card}\{i \in \{1, \ldots, n\} \mid N_i \neq 0\}$.

2. Έστω n ένας φυσικός αριθμός και R ένας υποδακτύλιος του δακτυλίου $\mathbb{M}_n(\mathbb{C})$ των $n \times n$ πινάκων με εγγραφές επί του σώματος $\mathbb{C}$, ο οποίος περιέχει όλους τους διαγώνιους πίνακες της μορφής $z \cdot I_n$, για κάθε $z \in \mathbb{C}$. Για κάθε έναν από τους επόμενους ισχυρισμούς να εξηγήσετε αν αυτός είναι σωστός ή λανθασμένος :

   (α′) (1 μονάδα) Ο δακτύλιος πηλίκο $R/\operatorname{rad}(R)$ είναι ημιαπλός.

   (β′) (2 μονάδες) Υπάρχει φυσικός αριθμός k με $k \leq n^2$, έτσι ώστε $(\operatorname{rad}(R))^k = 0$.

   (γ′) (1 μονάδα) Αν ο R είναι αριστερά primitive, τότε ο R είναι ημιαπλός.

Λύση.

(α) Αφού ο R περιέχει το $\mathbb{C}I_n$, τότε αποκτά δομή $\mathbb{C}$ - διανυσματικού χώρου ($z \cdot A = (z \cdot I_n) \cdot A \in R$) και μάλιστα $\dim_{\mathbb{C}} R \leq n^2$. Αφού R είναι διανυσματικός χώρος πεπερασμένης διάστασης και κάθε αριστερό R - υποπρότυπο του R είναι και $\mathbb{C}$ - διανυσματικός υπόχωρος του R συμπεραίνουμε ότι R είναι αριστερά της Nother και του Artin. Αφού $R/\mathrm{rad}(R)$ είναι αριστερά του Artin και Jacobson - ημιαπλός, τότε είμαι ημιαπλός.

(β) Αφού R είναι αριστερά Artinian, τότε γνωρίζουμε ότι $I = \mathrm{rad}(R)$ είναι μηδενοδύναμο. Έστω k, ο ελάχιστος φυσικός ώστε $[\mathrm{rad}(R)]^k = 0$. Θεωρούμε την φθίνουσα ακολουθία αριστερών ιδεωδών, άρα και $\mathbb{C}$ - διανυσματικών υποχώρων

$$0 = I^n \subsetneqq I^{n-1} \subsetneqq \cdots \subsetneqq I^2 \subsetneqq I \subsetneqq R.$$

δηλαδή αποφεύγουμε επαναλήψεις από την παραπάνω γραφή (αποδεικνύεται ότι αν $I^j = I^{j+1}$, τότε $I^j = 0$). Από την διάσταση του R και την παραπάνω αλυσίδα έχουμε ότι $k \leq n^2$.

(γ) Ο R είναι αριστερά του Artin και Jacobson ημιαπλός, ως αριστερά primitive, άρα είναι ημιαπλός.

3. Έστω V ένας διανυσματικός χώρος επί του $\mathbb{C}$ με $\dim_{\mathbb{C}} V = \infty$ και $R = \mathrm{End}_{\mathbb{C}} V$. Για κάθε ένα από τους ακόλουθους ισχυρισμούς, να εξετάσετε αν αυτός είναι σωστός ή λανθασμένος.

(α΄) (1 μονάδα) Για κάθε πεπερασμένα παραγόμενο αριστερό ιδεώδες I του R υπάρχει $r \in R$ έτσι ώστε $I = Rr$.

(β΄) (2 μονάδες) Για κάθε αριστερό ιδεώδες I του R υπάρχει $r \in R$ έτσι ώστε $I = Rr$.

Λύση.

(α) Αρκεί να δείξουμε ότι ο R είναι Von Neumann κανονικός. Έστω $f \in R$. Αναζητούμε $g \in R$ ώστε $f = f \circ g \circ f$. Υπάρχουν $U, W \leq V$ ώστε $V = \ker f \oplus U = \mathrm{Im} f \oplus W$. Παρατηρούμε ότι ο περιορισμός $f| \colon U \to \mathrm{Im} f$

είναι ισομορφισμός διανυσματικών χώρων, επομένως επιδέχεται αντίστροφο $h\colon \mathrm{Im} f \to U$. Θεωρούμε την σύνθεση

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "\pi_1"] \arrow[rrr, bend right, "g"'] & \mathrm{Im} f \arrow[r, "h"] & U \arrow[r, hook, "i_2"] & V \end{tikzcd}$$

Παρατηρήστε ότι $f = f \circ g \circ f$.

(β) Θα δείξουμε κάτι γενικοτερο. Έστω $\mathbb{F}$ σώμα και V ένας $\mathbb{F}$ διανυσματικός χώρος με $\dim_{\mathbb{F}} V$ άπειρη. Έστω B μια βάση του V. Αν $R = \mathrm{End}_{\mathbb{F}}(V)$ θεωρούμε το (αμφίπλευρο) ιδεώδες $I = \{f \in R \mid \dim \mathrm{Im} f < \infty\}$. Θα δείξουμε ότι αυτό το ιδεώδες δεν ικανοποιεί την αναφερθείσα ιδιότητα. Έστω $r \in R$, τέτοιος ώστε $I = Rr$, επομένως $\dim \mathrm{Im} r = n < \infty$. Έστω $B' \subseteq B$ με $|B'| > k$. Θεωρούμε την $f\colon V \to V$ με $f(v) = v$, για κάθε $v \in B'$ και $f(v) = 0$, για κάθε $v \in B \setminus B'$. Τότε, ισχύει ότι $\dim \mathrm{Im} g = |B'| > k$, ενώ για κάθε $h \in R$ ισχύει ότι $\dim \mathrm{Im}(h \circ r) \leq n$, άρα καταλήγουμε σε άτοπο.

4. (2 μονάδες) Η εναλλάσουσα ομάδα A_4 δρα στον διανυσματικό χώρο $V = \mathbb{C}^4$ μέσω γραμμικών απεικονίσεων που μεταθέτουν τα στοιχεία της κανονικής τους βάσης. [1] Να υπολογίσετε τον χαρακτήρα χ_V της αναπαράστασης αυτής, καθώς και το εσωτερικό γινόμενο $\langle \chi_V, \chi_V \rangle$.

Λύση. Παρακάτω σημειώνονται οι κλάσεις συζυγίας της A_4 μαζί με το πλήθος τους.

$$\#\mathcal{C}(1) = 1 \qquad \#\mathcal{C}(12)(34) = 3$$
$$\#\mathcal{C}(123) = 4 \qquad \#\mathcal{C}(132) = 4$$

Παραθέτουμε τον πίνακα του χαρακτήρα χ_V :

	1	(12)(34)	(123)	(132)
χ_V	4	0	1	1

[1] Για παράδειγμα, $(123) \cdot (7, -8, 35, -24) = (35, 7, -8, -24)$.

Για να υπολογίσουμε το εσωτερικό γινόμενο $\langle \chi_V, \chi_V \rangle$ υπολογίζουμε ως εξής :

$$\begin{aligned}\langle \chi_V, \chi_V \rangle = \sum_{\sigma \in A_4} \frac{\chi_V\left(\sigma^{-1}\right)\chi_V(\sigma)}{|A_4|} = \sum_{[\sigma] \in \mathcal{C}(A_4)} \frac{\gamma_\sigma \chi_V(\sigma)^2}{12} \\ = \quad \frac{1 \cdot 4^2 + 3 \cdot 0 + 4 \cdot 1^2 + 4 \cdot 1^2}{12} = 2\end{aligned}$$