

## Άλγεβρα ΙΙ

Εξέταση Σεπτεμβρίου 2021

**Άσκηση 1.** (1 + 1 + 1 = 3 μονάδες)

Είναι οι επόμενοι ισχυρισμοί σωστοί ή λανθασμένοι; Να εξηγήσετε την απάντησή σας.

(α) Αν  $R$  είναι ένας δακτύλιος,  $M$  ένα γινόμενο ημιαπλών  $R$ -πρότυπων και  $r \in \text{rad } R$ , τότε  $rx = 0 \in M$  για κάθε  $x \in M$ .

(β) Έστω  $R$  ένας δακτύλιος και  $M$  ένα  $R$ -πρότυπο. Αν ο δακτύλιος  $\text{End}_R M$  είναι διαιρετικός, τότε το  $R$ -πρότυπο  $M$  είναι απλό.

(γ) Ο δακτύλιος  $M_2(\mathbf{Q})$  των  $2 \times 2$  πινάκων με ρητούς συντελεστές είναι απλός.

**Άσκηση 2.** (2 μονάδες)

Έστω  $R$  ένας ημιαπλός δακτύλιος, που είναι τέτοιος ώστε το κέντρο του  $Z(R)$  είναι ένας απλός δακτύλιος. Να δείξετε ότι ο δακτύλιος  $R$  είναι επίσης απλός.

**Άσκηση 3.** (2 μονάδες)

Έστω  $R = T_2(\mathbf{C})$  ο δακτύλιος των άνω τριγωνικών  $2 \times 2$  πινάκων με μιγαδικούς συντελεστές. Να υπολογίσετε το ριζικό  $\text{rad } R$  του δακτυλίου  $R$ .

**Άσκηση 4.** (3 μονάδες)

Έστω  $G$  μια πεπερασμένη ομάδα και  $U, V$  δύο  $\mathbf{C}G$ -πρότυπα με πεπερασμένη διάσταση επί του  $\mathbf{C}$  και χαρακτήρες  $\chi_U$  και  $\chi_V$  αντίστοιχα. Να δείξετε ότι οι επόμενοι δύο ισχυρισμοί είναι ισοδύναμοι:

(α) Υπάρχουν μη-μηδενικές  $\mathbf{C}G$ -γραμμικές απεικονίσεις  $U \rightarrow V$ .

(β)  $\langle \chi_U, \chi_V \rangle \neq 0$ .

Η διάρκεια της εξέτασης είναι 2.5 ώρες. Καλή επιτυχία!