

Άλγεβρα ΙΙ

Ενδιάμεση εξέταση 12/6/2014

Τα 4 θέματα είναι βαθμολογικά ισοδύναμα. Δικαιολογήστε πλήρως τις απαντήσεις σας. Καλή επιτυχία.

Θέμα 1 Θεωρούμε τους δακτυλίους \mathbb{Z}_{75} , $\frac{\mathbb{Q}[x]}{(x^2 - 2)}$, $\frac{\mathbb{Q}[x]}{((x^2 - 2)^2)}$.

- α) Ποιοι είναι ημιαπλοί;
 β) Ποιοι είναι της Noether ή/και του Artin;
 γ) Σε κάθε περίπτωση περιγράψτε τα απλά πρότυπα (πόσα είναι ως προς ισομορφισμό, ποια είναι;).

Θέμα 2 Έστω k σώμα, G πεπερασμένη κυκλική ομάδα τάξης n και R η k -άλγεβρα $R = \frac{k[x]}{(x^n - 1)}$.

- α) Δείξτε ότι οι k άλγεβρες $k[G]$ και R είναι ισόμορφες.
 β) Υποθέτουμε εδώ ότι $k = \mathbb{Z}_p$, p πρώτος.
 - Βρείτε ικανή και αναγκαία συνθήκη στα p, n έτσι ώστε ο R είναι ημιαπλός.
 - Για $p = 3$ και $n = 4$, ποιες είναι οι συνιστώσες Wedderburn του R ;

Θέμα 3 Έστω k σώμα. Θεωρούμε το δακτύλιο

$$R = \{(a_{ij}) \in M_3(k) \mid a_{31} = a_{32} = 0\}$$

και το R -πρότυπο $V = M_{3 \times 1}(k)$ (με εξωτερικό πολλαπλασιασμό τον πολλαπλασιασμό πινάκων).

- α) Βρείτε μια συνθετική σειρά του V ως R -πρότυπο.
 β) Αληθεύει ότι το V είναι ημιαπλό R -πρότυπο;

Θέμα 4 Στα παρακάτω R είναι ημιαπλή \mathbb{C} -άλγεβρα με $\dim_{\mathbb{C}} R < \infty$.

- α) Έστω M απλό R -πρότυπο. Δείξτε ότι $\dim_{\mathbb{C}} M < \infty$ και ο δακτύλιος $\text{End}_R M$ είναι ισόμορφος με το \mathbb{C} .
 β) Να ταξινομηθούν ως προς ισομορφισμό οι R με $\dim_{\mathbb{C}} R = 5$.
 γ) Δείξτε ότι ο R είναι ημιαπλός αν και μόνο αν για κάθε μη μηδενικά R -πρότυπα M, N ισχύει $\text{Hom}_R(M, N) \neq 0$.