Μεταπτυχιακή Άλγεβρα ΙΙ
Ιούνιος 2007

1. Έστω $R = M_2(\mathbb{Z})$.
   a. Δείξτε ότι ο δακτύλιος *R* δεν είναι απλός. Υπόδειξη: Θεωρείστε $I = M_2(2\mathbb{Z})$.
   b. Δείξτε ότι ο δακτύλιος *R* δεν είναι του Artin.
   c. Δείξτε ότι ο δακτύλιος *R* δεν είναι ημιαπλός.
   d. Εξετάστε αν το *R* είναι προβολικό $\mathbb{Z}$-πρότυπο.
   e. Αποδείξτε ότι για κάθε σώμα *k* υπάρχει ισομορφισμός δακτυλίων $k \underset{\mathbb{Z}}{\otimes} M_2(\mathbb{Z}) \simeq M_2(k)$.

2. Έστω *k* ένα σώμα.
   a. Αποδείξτε ότι υπάρχει ισομορφισμός ομάδων $Aut(M_n(k)) \cong \dfrac{GL_n(k)}{C}$,όπου $C = \{aI \mid a \in k - \{0\}\}$
   b. Αληθεύει ότι το τανυστικο γινόμενο δυο *k*-αλγεβρών διαίρεσης είναι πάντα *k* άλγεβρα διαίρεσης;

3. Έστω $\{e_1,...,e_4\}$ μια βάση του $\mathbb{C}$-διανυματικού χώρου $V = \mathbb{C}^4$. Θεωρούμε το *V* ως $\mathbb{C}[S_3]$-πρότυπο: Για κάθε $\sigma \in S_3$, $\sigma(e_i) = e_{\sigma(i)}$, $i = 1,2,3$, και $\sigma(e_4) = e_4$. Έστω χ ο χαρακτήρας του *V*.
   a. Υπολογίστε τις τιμές $\chi(12)$, $\chi(123)$.
   b. Δείξτε ότι ο $\chi - 2\chi_1$ είναι χαρακτήρας της S_3, όπου χ_1 είναι ο τετριμμένος χαρακτήρας της S_3.

4. Έστω *G* μια πεπερασμένη ομάδα.
   a. Έστω $\chi_1,...,\chi_s$ οι ανάγωγοι χαρακτήρες της *G*. Αν χ είναι χαρακτήρας τέτοιος ώστε $\langle \chi, \chi \rangle = 2$, να βρεθεί η ανάλυση του χ σε $\mathbb{N}$-γραμμικό συνδυασμό των χ_i.
   b. Βρείτε τη *G* αν γνωρίζουμε ότι το πλήθος των αναγώγων χαρακτήρων της είναι 2.

Απαντήστε στο Θέμα 1 και δύο από τα Θέματα 2-4. Καθένα από τα υποερωτήματα αξίζει 0,9 μονάδες.

Καλή Επιτυχία