Μεταπτυχιακή Άλγεβρα ΙΙ

Σεπτέμβριος 2001

1) Α) Έστω G και H δύο πεπερασμένες ομάδες. Δείξτε ότι υπάρχει ισομορφισμός $\mathbb{C}$- αλγεβρών $\mathbb{C}[G\times H]\approx\mathbb{C}[G]\otimes\mathbb{C}[H]$.
   Β) (συνέχεια από το Α)) Περιγράψτε τους ανάγωγους χαρακτήρες της $G\times H$ συναρτήσει αυτών των G και H και αποδείξτε τον ισχυρισμό σας.
   Γ) Ως εφαρμογή του προηγούμενου, προσδιορίστε τον πίνακα χαρακτήρων της ομάδας $S_3\times\mathbb{Z}_2$.
   Δ) Έστω χ ο μοναδικός ανάγωγος χαρακτήρας της $S_3\times\mathbb{Z}_2$ βαθμού 2. Βρείτε την ανάγωγη ανάλυση του χ^2.

2) Α) Αληθεύει ότι κάθε υποδακτύλιος ημιαπλού δακτυλίου είναι ημιαπλός;
   Β) Αληθεύει ότι κάθε ομομορφική εικόνα ημιαπλού δακτυλίου είναι ημιαπλός;
   Γ) Αληθεύει ότι το τανυστικό γινόμενο δύο ημιαπλών $\mathbb{C}$-αλγεβρών είναι ημιαπλή $\mathbb{C}$-άλγεβρα;
   Δ) Αληθεύει ότι το κέντρο κάθε ημιαπλού δακτυλίου είναι ημιαπλός δακτύλιος;

3) Α) Αποδείξτε ότι ο δακτύλιος R είναι ημιαπλός αν και μόνο αν είναι δακτύλιος του Artin και το ριζικό του Jacobson είναι μηδενικό.
   Β) Για ποιά $n\in\mathbb{N}$ ο $\mathbb{C}[x]/(x^n)$ έχει μηδενικό ριζικό του Jacobson; Για ποιά $n\in\mathbb{N}$ ο $\mathbb{Z}_n$ είναι ημιαπλός;

4) Α) Έστω D μια άλγεβρα διαίρεσης που περιέχει ένα πεπερασμένο σώμα k στο κέντρο της. Υποθέτουμε ότι κάθε στοιχείο του D είναι ρίζα μη μηδενικού πολυωνύμου με συντελεστές από το k. Αποδείξτε ότι το D είναι σώμα.
   Β) Έστω R μια πεπερασμένης διάστασης απλή κεντρική άλγεβρα με κέντρο k. Αποδείξτε ότι $R\otimes R^{op}\approx M_n(k)$, όπου $n=\dim_k R$.

Απαντήστε στο θέμα 1) και σε δύο άλλα από τα υπόλοιπα.