

Άλγεβρα ΙΙ
Εξετάσεις Σεπτεμβρίου 2018

1. (2 μονάδες) Έστω R ένας δακτύλιος και V ένα απλό R -πρότυπο. Θεωρούμε ένα R -πρότυπο M και υποθέτουμε ότι υπάρχει ένας φυσικός αριθμός n και υποπρότυπα $M_1, \dots, M_n \subseteq M$ τέτοια ώστε $M_i \cong V$, για κάθε $i = 1, \dots, n$ και $M = M_1 + \dots + M_n$. Να αποδείξετε ότι υπάρχει φυσικός αριθμός k , τέτοιος ώστε $M \cong V^k$.
2. (2 μονάδες) Έστω R ένας δακτύλιος, $I \subseteq R$ και $\bar{R} = R/I$ ο αντίστοιχος δακτύλιος πηλίκο. Αν $J = I + \text{rad}(R) \subseteq R$, να αποδείξετε ότι $J/I \subseteq \text{rad}(\bar{R})$.
3. (2 μονάδες) Έστω R ένας δακτύλιος, V ένα απλό R -πρότυπο και $E = \text{End}_R V$ ο δακτύλιος των ενδομορφισμών του. Αν $x, y \in E$ είναι δύο στοιχεία με $xy = 1_E$, να δείξετε ότι $yx = 1_E$.
4. (2 μονάδες) Η ομάδα S_5 δρα στον διανυσματικό χώρο $V = \mathbb{C}^5 = \bigoplus_{i=1}^5 \mathbb{C}e_i$ μέσω των γραμμικών απεικονίσεων που μεταθέτουν τα διανύσματα e_1, e_2, e_3, e_4, e_5 . (Έτσι, για παράδειγμα, είναι $(13) \cdot (e_1 + 3e_2 - 5e_3) = e_3 + 3e_2 - 5e_1$) Θεωρούμε τον αναλλοίωτο υπόχωρο $U = \mathbb{C}e$, όπου $e = e_1 + e_2 + e_3 + e_4 + e_5$, και το $\mathbb{C}S_5$ -πρότυπο πηλίκο $M = V/U$. Να υπολογίσετε τον χαρακτήρα χ_M του M .
5. (2 μονάδες) Θεωρούμε έναν πεπερασμένο δακτύλιο R , ο οποίος είναι αριστερά primitive. Να δείξετε ότι ο R είναι ημιαπλός.

*Η διάρκεια της εξέτασης είναι 2,5 ώρες.
Καλή επιτυχία !*