27.02.2020
3º Μαθημα

Σχόλια:

▷ Προβλημα Δυο Σωμάτων

Οι πλανητες κινουνται σε ελλειπτικες τροχιες. Θεωρουμε οτι ο Ηλιος ειναι ακινητος. Αρα ο Ηλιος ειναι μεγαλυτερος. Δεν εχουμε σχεση για τις μαζες m_1, m_2.

Εχουμε m_1, m_2, $\vec{a} = \frac{\vec{F}}{m}$, Νομος παγκοσμιας Βαρύτητας

Επισης, $F = \frac{m_1 m_2 G}{r^2}$

Θεση μαζας m_1: $\overline{X} = (x_1, x_2, x_3)$
θεση μαζας m_2: $Y = (y_1, y_2, y_3)$

$$\begin{cases} (1) \quad X'' = \dfrac{G m_2 (Y - X)}{|Y - X|^3} \\ (2) \quad Y'' = \dfrac{G m_1 (X - Y)}{|X - Y|^3} \end{cases}$$

(1): κινηση μαζας m_1 λογω του m_2

12 εξισωσεις

(2): κινηση μαζας m_2 λογω του m_1

Παρατήρηση: Διατηρηση της Ορμής

Οριζουμε το κεντρο μαζας του συστηματος των m_1, m_2

$$Z = \frac{m_1 X + m_2 Y}{m_1 + m_2} \quad (3)$$

Απο (1), (2), (3) $\Rightarrow Z'' = 0 \Rightarrow Z(t) = \overline{C_1} t + \overline{C_2}$

$(1) \cdot m_1$, $(2) \cdot m_2$

↳ ως προς αυτήν την ευθεια θα περιγραφουμε τις ελλειπτικες τροχιες

$\mathcal{X}$: σχετική θεση του m_1 ως προς το κεντρο μαζας

$$\mathcal{X} := X - Z = X - \frac{m_1 X + m_2 Y}{m_1 + m_2} = \frac{m_2 (X - Y)}{m_1 + m_2}$$

Διαφορίζω και έχω:

$$x'' = -Gm_2\left(\frac{m_1+m_2}{m_2}\cdot x\right)\frac{1}{\left(\frac{m_1+m_2}{m_2}\right)^3|x|^3} =$$

$$= \frac{-m_2^3 G}{(m_1+m_2)^2}\frac{x}{|x|^3}$$

Παρατηρώ ότι η δύναμη είναι συντηρητική, με δυναμικό, με αλλαγή κλίμακας και κεντρική

Το δυναμικό έχει την μορφή $V(x) = -\frac{1}{|x|}$

$F = -\nabla V(x)$

Άσκηση 5

Επαληθεύουμε τα ακόλουθα (Διαλέξεις 1,2 [HS] σελ 21)

(προηγούμενη διάλεξη λάθος
$x'' = i(r'' - r(\theta')^2) + \vec{j}\,\frac{1}{r}\frac{d}{dt}(r^2\theta')$)

$$x'' = (r'' - (\theta')^2 r)\vec{i} = \frac{F(x)}{m} = \nabla\left(\frac{1}{|x|}\right)\frac{1}{m} = \frac{-x}{|x|^3}\frac{1}{m}$$

$r = |x|$

(1): $r'' - (\theta')^2 r = -\frac{1}{r^2}m$

(2): $h = r^2\theta$ (Διατήρηση της στροφορμής)

$$\Rightarrow \theta' = \frac{h}{r^2} \overset{(1)}{\Rightarrow} r'' - \left(\frac{h}{r^2}\right)^2 r = -\frac{1}{mr^2}$$

$$\Leftrightarrow r'' = \frac{h^2}{r^3} - \frac{1}{mr^2} \quad (3)$$

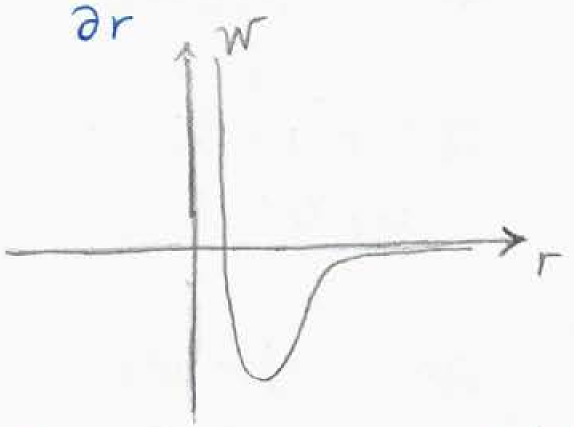
(πως αλλάζει η απόσταση σε σχέση με την κίνηση)

πως αλλάζει η γωνία σε σχέση με την κίνηση.

Οριζουμε καινουριο δυναμικο :

$$W(r) = -\frac{1}{mr} + \frac{h}{2r^2}$$

$$r'' = -\frac{\partial}{\partial r} W(r) \Leftrightarrow (3)$$

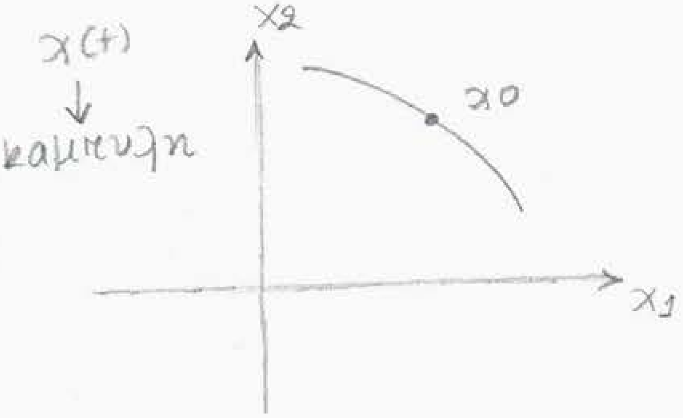


Επιπεδο Φασης - Γεωμετρικη Ταξινομηση Γραμμικων Συστηματων

(Αλικακος - Καλογεροπουλος Κεφ.10)

$$\begin{cases} x' = Ax \\ x(0) = x_0 \end{cases} \qquad A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}, \; a_{ij} \in \mathbb{R}$$

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \qquad \begin{array}{l} x_1 : \text{θεση} \\ x_2 : \text{ταχυτητα} \end{array}$$



$x_1 - x_2$: επιπεδο φασης

Γεωμετρικα η λυση μας ειναι καμπυλη και μας ενδιαφερει η τοπολογια της και η γεωμετρια της.

ΣΙ: χρονοανεξαρτητες λυσεις

$$\Sigma I = \{ x \mid Ax = 0 \}$$

Κατ'αρχας : $\det A = 0 \Rightarrow \Sigma I = \{0\}$

$$\det(A - \lambda I) = 0$$

$$\lambda^2 - (\underbrace{trA}_{a_{11}+a_{12} = \lambda_1 + \lambda_2})\lambda + \underbrace{\det A}_{\lambda_1 \lambda_2} = 0$$

Μας ενδιαφερουν για την ταξινομηση των λυσεων οι ιδιοτιμες και τα ιδιοδιανυσματα

Κανονικές Μορφές (Hale - Kosak)
(Jordan)

1) $PAP^{-1} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}$ (διαγωνοποιήσιμη περίπτωση)

P: πίνακας ομοιότητας $(\lambda_i \in \mathbb{R})$

2) $PAP^{-1} = \begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix}$ $\lambda_\pm = a \pm bi$, $b \neq 0$

3) $PAP^{-1} = \begin{bmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}$, $\lambda \in \mathbb{R}$ Jordan block

Θα ξεκινήσουμε με τον A σε κανονική μορφή

i) $A = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}$

$$\begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1 x_1 \\ \lambda_2 x_2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} x_1' = \lambda_1 x_1 \\ x_2' = \lambda_2 x_2 \end{cases}$$

Απαλοιφή χρόνου:

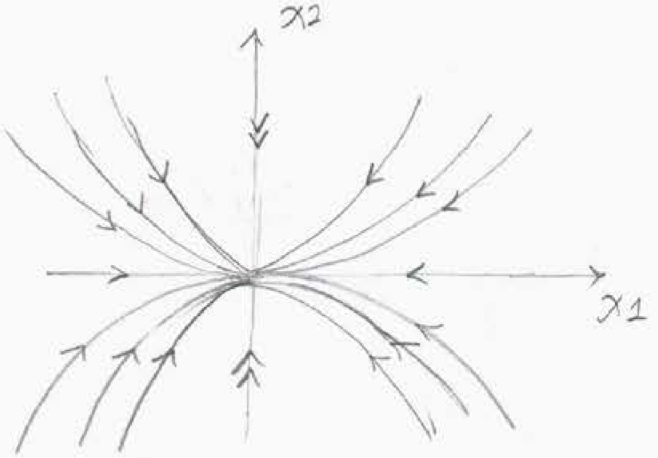
$$\frac{dx_2}{dx_1} = \frac{x_2'}{x_1'} = \frac{\lambda_2}{\lambda_1} \frac{x_2}{x_1}$$

$$\frac{dx_2}{x} = \frac{dx_1}{x} \frac{\lambda_2}{\lambda_1} \Rightarrow \ln|x_2| = \frac{\lambda_2}{\lambda_1} \ln|x_1| + \ln c$$

$$|x_2| = c|x_1|^{\lambda_2/\lambda_1}$$

α) $\lambda_2 < \lambda_1 < 0$

$\frac{\lambda_2}{\lambda_1} > 1$



Ευσταθής κομβος

$x_1(t) = x_1(0)\, e^{\lambda_1 t} \qquad \underset{0}{\rightarrow \bullet \leftarrow}$

$x_2(t) = x_2(0)\, e^{\lambda_2 t} \qquad \underset{0}{\rightarrow \bullet \leftarrow}$

Οι άξονες ειναι αναλλοιωτοι, δηλαδη το $x(0) \in$ άξονα (Ιδιοχωρος αναλλοιωτοι) $\Rightarrow x(t)$ άξονα

Υπολογισμος (καθως $t \to \infty$)

$$\frac{x'(t)}{|x'(t)|} = \begin{pmatrix} \lambda_1 x_1(0)\, e^{\lambda_1 t} \\ \lambda_2 x_2(0)\, e^{\lambda_2 t} \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{\lambda_1^2 e^{2\lambda_1 t} x_1^2(0) + \lambda_2^2 e^{2\lambda_2 t} x_2^2(0)}}$$

$$\left.\begin{matrix} \lambda_2 < \lambda_1 < 0 \\ \lim\limits_{t \to \pm\infty} \end{matrix}\right| = e^{\lambda_1 t} \begin{pmatrix} \lambda_1 x_1(0) \\ \lambda_2 x_2(0)\, e^{(\lambda_2 - \lambda_1)t} \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{\quad}} \cdots$$

$$\lim_{t \to +\infty} \frac{x'(t)}{|x'(t)|} = \frac{x_1(0)\lambda_1}{|x_1(0)\lambda_1|} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

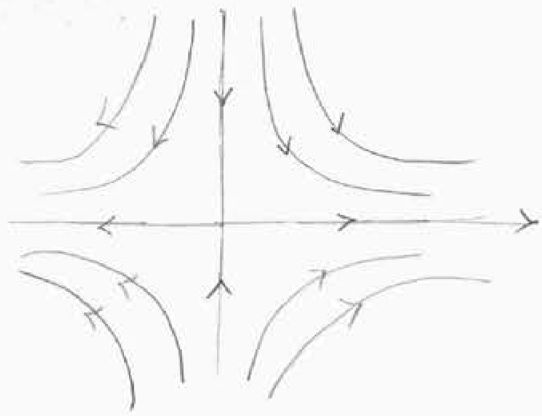
Συμπεριφορα καμπυλης

$$\lim_{t \to -\infty} \frac{x'(t)}{|x'(t)|} = \frac{x_2(0)\lambda_2}{|x_2(0)\lambda_2|} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

β) $\lambda_2 < 0 < \lambda_1$

$$\frac{\lambda_2}{\lambda_1} < 0$$

$$|x_2| = C|x_1|^{\lambda_2/\lambda_1}$$

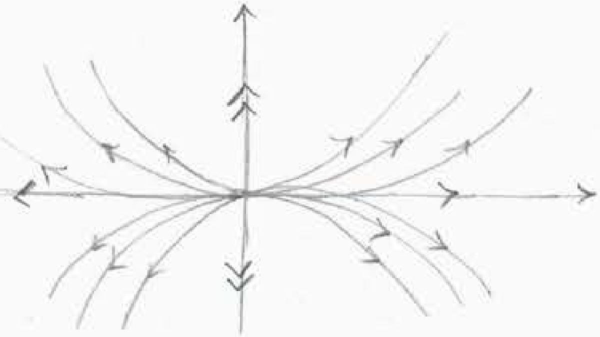


Σάγμα

(Ασταθής μεταλλακτο-κήτα - ελκυστής)

γ) $0 < \lambda_1 < \lambda_2$

$$|x_2| = |x_1|^{\lambda_2/\lambda_1} C$$

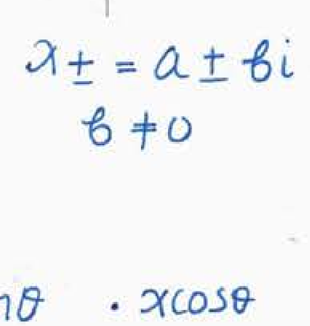


Ασταθής Κόμβος

Άξονες Αναλλοίωτοι

ii) Μιγαδικές Ιδιοτιμές

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}' = \begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$



$x_1 = r\cos\theta$
$x_2 = r\sin\theta$

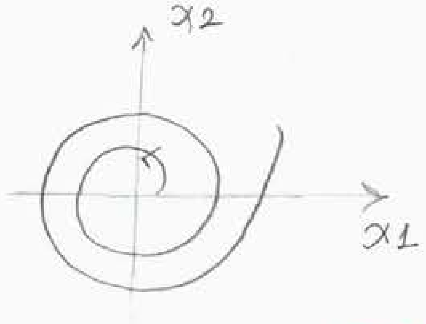
$\lambda_\pm = a \pm bi$
$b \neq 0$

$$x_1' = a x_1 + b x_2$$
$$x_2' = -b x_1 + a x_2$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} r'\cos\theta - r\sin\theta\,\theta' = ar\cos\theta + br\sin\theta & \cdot \cos\theta \quad \Big| \cdot \sin\theta \\ r'\sin\theta + r\cos\theta\,\theta' = -br\cos\theta + ar\sin\theta & \cdot \sin\theta \quad \Big| \cdot \cos\theta \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} r' = ar \ (1) \\ \theta' = b \ (2) \end{cases}$$

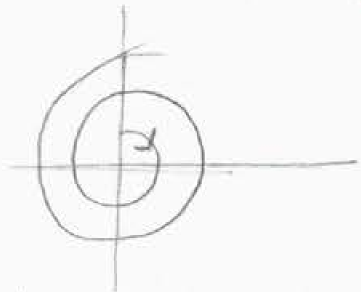
Για $a > 0$
$b > 0$



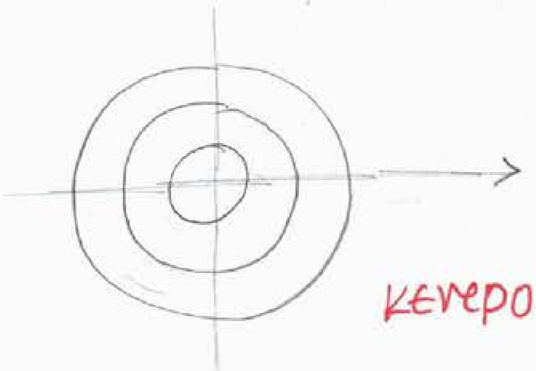
$r(t) = r(0)e^{at}$
$\theta(t) = -bt + \gamma$

Για $a < 0$
$b < 0$

έλικα



$a = 0$



περιφέρεια

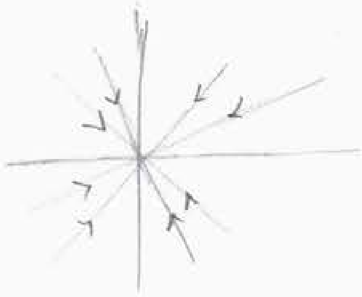
κέντρο

$$\lambda^2 - (trA)\lambda + \det A = 0$$
$$\Delta = (trA)^2 - 4\det A = (2a)^2 - 4(a^2+b^2) = -4b^2 < 0$$

iii) Ίσες Ιδιοτιμές

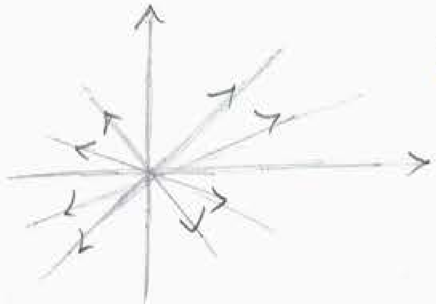
(α) $\lambda_1 = \lambda_2$ γεωμ. πολ/τα 2
(δύο ιδιοδιανύσματα)

$$x' = \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} x$$



$\lambda < 0$

νόθος κόμβος:
όλες οι ευθείες διερχόμενες μέσω του $(0,0)$ είναι αναλλοίωτες



$\lambda > 0$

(β) Jordan block

$$x' = \begin{bmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

γεωμ. πολ/τα: 1 ≠ δ'ι απο
αλγεβρική πολ/τα: 2 Jordan

$$x_1' = \lambda x_1 + x_2$$

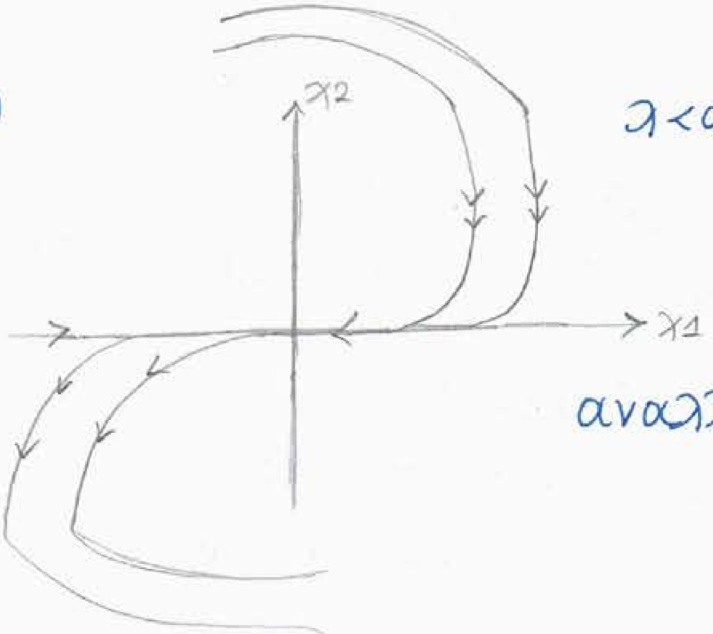
$$x_2' = \lambda x_2 \Rightarrow x_2(t) = x_2(0)\, e^{\lambda t}$$

$$\Rightarrow x_1' = \lambda x_1 + x_2(0)\, e^{\lambda t} \Rightarrow x_1(t) = e^{\lambda t} x_1(0) + \int_0^t e^{\lambda(t-\tau)} x_2(0)\, e^{\lambda \tau} d\tau$$

$$= e^{\lambda \tau} x_1(0) + e^{\lambda \tau} x_2(0)\, t$$

$$x_2(t) = \frac{1}{\frac{x_1(0)}{x_2(0)} + x(t)}$$

$$\lim_{|t| \to +\infty} \frac{x_2(t)}{x_1(t)} = 0$$



$\lambda < 0$

αναλλοίωτο