20/02/2020
Μάθημα 1ο

Συνήθεις Διαφορικές Εξισώσεις και Δυναμικά Συστήματα

- e-class (Διαλέξεις)
- Γραφείο 313
  Τρίτη - Πέμπτη: 1-2
  Παρασκευή: 2-   Παρασκευή: 3 15 (Σεμινάριο)
- nalikako@math.uoa.gr

Ύλη

Βιβλίο: Αλικάκος - Καλογερόπουλος (10ο κεφ)
(Ποιοτική θεωρία)

Hirsch - Smale:
- Κεφάλαιο 2 (Newton - Kepler)
- Κεφάλαιο 11 (Poincare - Bendixson)
- Κεφάλαιο 12 (Μαθηματική Οικολογία)
- Κεφάλαιο 13 (Περιοδικοί Ελκυστές)

Βιβλιογραφία

Elementary

Arnold (ODE's (ύπαρξη και μεταφραση)
Hale - Kosak

Advanced

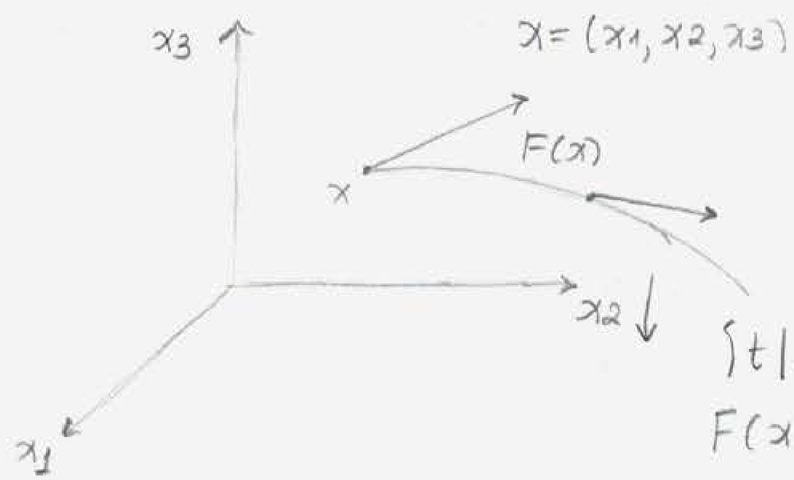
J Hale
P. Hartman

Ποιοτική θεωρία: $t \to \pm\infty$

Νευτωνια Μηχανική

Α. Συντηρητικά Πεδία

$2^{\underline{os}}$ Νομος του Νευτωνα: $F = ma$



$F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$

Η μαζα θα κινηθει με βαση το νομο του Νευτωνα

$\{t \mid x(t) : \text{τροχια}\}$

$F(x(t)) = m x''(t)$

Ορισμός: (Συντηρητικό πεδιο) ειναι ενα πεδιο δυναμεων που προερχεται απο δυναμικο

$$F(x) = -\nabla V(x) = -\left(\frac{\partial V}{\partial x_1}, \frac{\partial V}{\partial x_2}, \frac{\partial V}{\partial x_3}\right)$$

Ιδιοτητες συντηρητικων πεδιων (γνωστές)

Εργο δεν εξαρταται απο τη διαδρομή

Θεώρημα 1: (Διατήρηση της Μηχανικής Ενεργειας)

Αν ορισουμε τη μηχανική ενεργεια

$$E(t) = \frac{1}{2} m |x'(t)|^2 + V(x(t))$$

αν ορισω μια τροχιά που κινειται υπο δυναμική η μηχανική ενεργεια διατηρειται σταθερή

$$\frac{d}{dt}(E(t)) = 0$$

Αποδειξη

$$E(t) = \frac{1}{2} m |x'(t)|^2 + V(x(t)) = \frac{1}{2} m x'(t) \cdot x'(t) + V(x(t))$$

$$\frac{d}{dt}E(t) = m x'(t)\, x''(t) + \nabla V(x(t))\, x'(t) =$$

$$= x'(t)\,[\,m x''(t) + \nabla V(x(t))\,] = 0$$

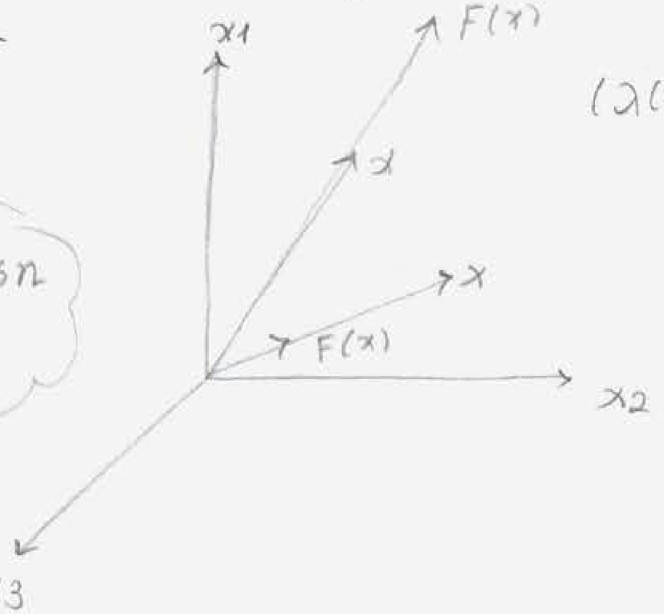
$F(x(t)) = -\nabla V(x)$
Απο 2º Νομο
του Νευτωνα

Β. Κεντρικα Πεδια Δυναμεων ($\mathbb{R}^3$)

Ορισμος: $x \in \mathbb{R}^3$ και θεωρουμε πεδια της μορφης

$F(x) = \lambda(x) \cdot x$ αυτά ειναι εξ' ορισμου τα κεντρικα πεδια

→ βαθμωτή
$\lambda : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$



$(\lambda(x) > 1)$

Η δυναμη με τη θεση που βρισκομαστε ειναι συγγραμμικα

Λημμα 2: Εστω F συντηρητικο πεδιο, $F(x) = -\nabla V(x)$

Τοτε τα εξης ειναι ισοδυναμα:

Α) F κεντρικο πεδιο

Β) $F(x) = f(|x|) \cdot x$ (εξαρταται μονο απο την ευκλειδια νορμα του x)

Γ) $V(x) = g(|x|)$

Αποδειξη: $|x| = (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)^{1/2}$

$(\gamma) \Rightarrow (\beta) \Rightarrow (\alpha) \Rightarrow (\gamma)$ ← οχι τοσο προφανες

$(\gamma) \to (\beta)$: $V(x) = g(|x|)$ $\quad F = (F_1, F_2, F_3)$

μορφή ΚΠΔ

$$F_i(x) = -\frac{\partial}{\partial x_i}(g(|x|)) = -g'(|x|)\frac{\partial}{\partial x_i}(|x|) = \overbrace{-g'(|x|)\frac{x_i}{|x|}}^{\lambda(x)} = \lambda(x)\,x_i$$

$(\beta) \Rightarrow (\alpha)$ (προφανές!)

$(\alpha) \Rightarrow (\gamma)$: στο δυναμικό οι ισοσταθμικές του επιφάνειες είναι σφαίρες

$$V(x) = \sigma\tau\alpha\theta = g(|x|) \Rightarrow \{|x| = a\}$$

$|\vec{u}(t)| = \alpha$

Θ.δ.ο $V(P) = V(Q)$

$u(t)$: τροχιά

Συνεπώς θέλω να υπολογίσω τη μεταβολή κατά μήκος της τροχιάς

συντηρητικό

$$\frac{d}{dt} V(u(t)) = \nabla V(u(t)) \vec{u}'(t) = -F(u(t))\, u'(t)$$

$$= -\lambda(u(t))\, u(t) \cdot u'(t) \underset{(*)}{=} 0$$

κεντρικό

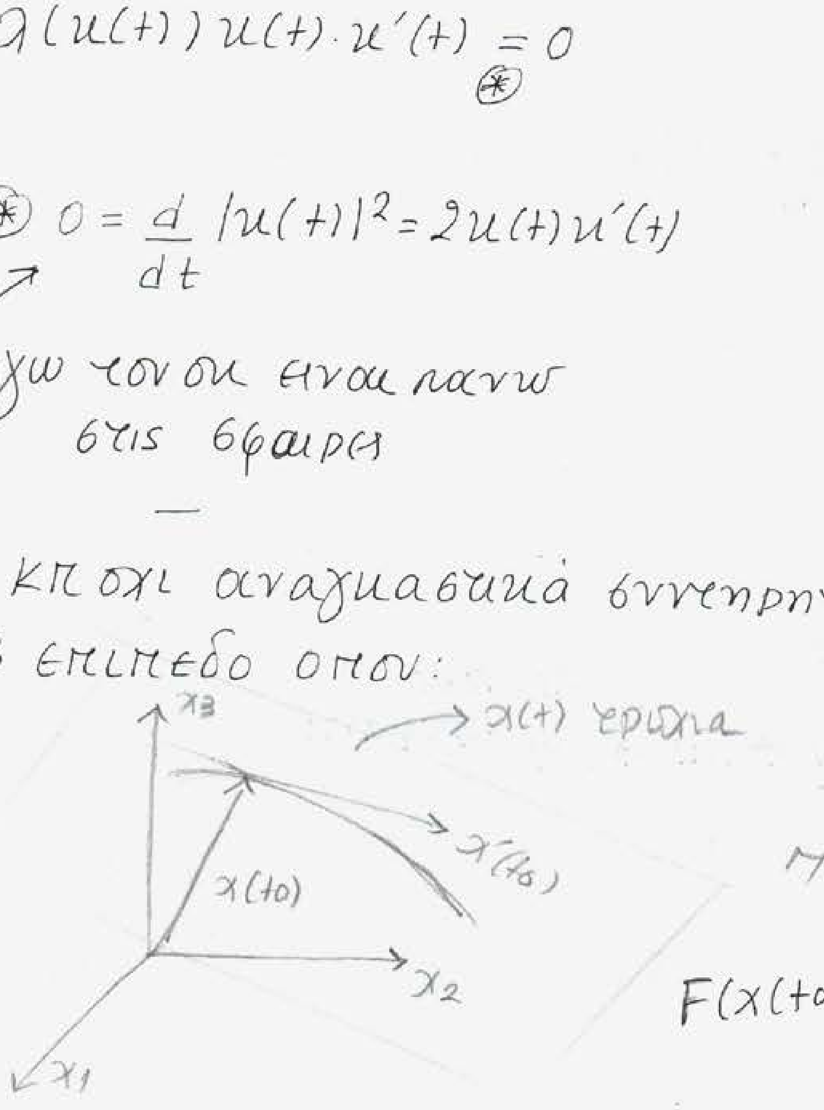
$$(*)\quad 0 = \frac{d}{dt} |u(t)|^2 = 2u(t)\, u'(t)$$

λόγω του ότι είναι πάνω στις σφαίρες

—

Έστω $F(x)$ κπ όχι αναγκαστικά συντηρητικό

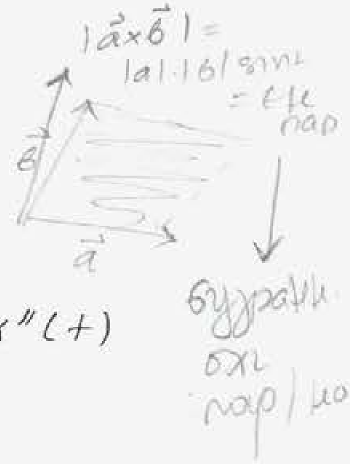
Έστω $\Pi \subset \mathbb{R}^3$ επίπεδο όπου:



$F(x(t_0)) = \lambda x(t_0) \times x(t_0)$

$\in \Pi$

Συνεπώς, αναμένουμε ότι η τροχιά θα είναι επί του Π
(Ρίχνουμε τη διάσταση του προβλήματος)



Λήμμα 3: $x(t) \in \Pi \ \forall t$
(Η διαφορική εξίσωση μένει αναλλοίωτη)

Απόδειξη

$$\frac{d}{dt}(\overbrace{x(t) \times x(t)}^{N(t)}) = x'(t) \times x'(t) + x(t) \times x''(t)$$

↳ Leibniz

$$= x(t) \times x''(t) = x(t) \times \frac{F(x(t))}{m}$$

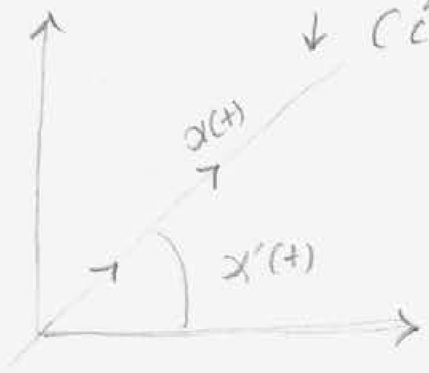
↑ 2ος Νόμος

$$= x(t) \times \frac{\lambda(x(t))\cdot x(t)}{m} = 0$$

κΠ

Περιπτώσεις: i) $N(t) \neq 0$: κίνηση σε σταθ επίπεδο

ii) $N(t) \equiv 0 \Rightarrow \vec{x}'(t) = g(t)\, x(t)$
(κίνηση επί ευθείας
↓ $(\hat{c}_1, \hat{c}_2, \hat{c}_3)$



Απόδειξη: (ΤΕΤΡΙΜΜΕΝΟ)

$$x'_k(t) = g(t)\, x_k(t), \quad k = 1, 2, \ldots$$

$$\frac{x'_k(t)}{x_k(t)} = g(t) \Rightarrow \ln|x_k(t)| = \int_{t_0}^{t} g(t)\,dt + c$$

$$\Rightarrow x_k(t) = \hat{C}_k\, e^{\int_{t_0}^{t} g(t)\,dt}$$

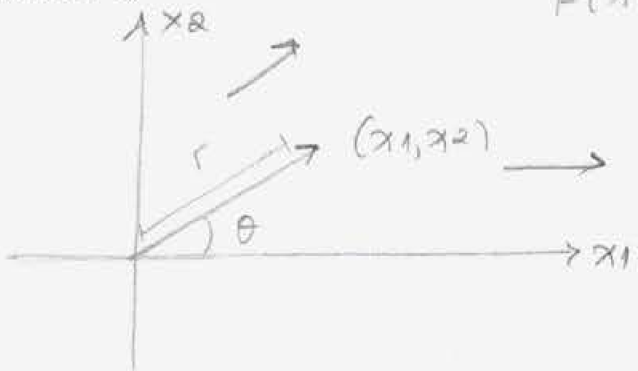
$$x(t) = (\hat{C}_1, \hat{C}_2, \hat{C}_3)\, e^{\int_{t_0}^{t} g(t)\,dt}$$ (σταθερό διάνυσμα επί μια συνάρτηση (η οποία είναι ένας αριθμός) που δίνει ευθεία)

Τωρα θα υποθεσουμε οτι F κεντρικο και συντηρητικο (δεν θα υποθεσω οτι εχει τη μορφη του βαρυτικου πεδιου)

$$F(x) = -\left(\frac{\partial V}{\partial x_1}, \frac{\partial V}{\partial x_2}\right)$$

θεωρω πολικες συντ/νες

$x_1 = r\cos\theta$
$x_2 = r\sin\theta$



ως προς απο το κεντρο μετραω τη στροφορμη

Ορισμος: (Στροφορμη) : $h = mr^2\theta'$, οπου $r = |x|$ (Σε μια τροχια)

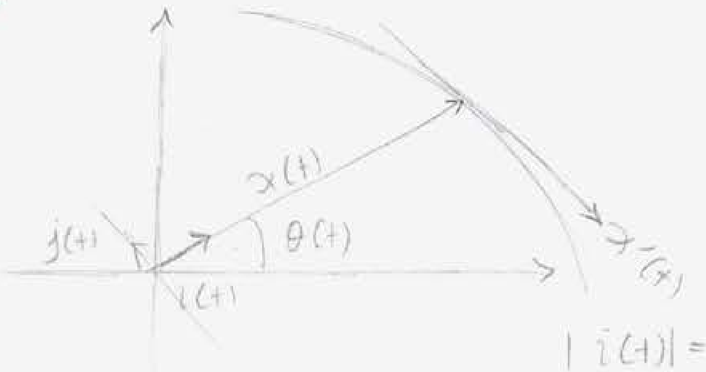
αποσταση απο την αρχη των αξονων

(ΓΙΑ ΤΗ ΣΤΡΟΦΟΡΜΗ ΑΡΚΕΙ ΤΟ ΚΕΝΤΡΙΚΟ)

Θεωρημα 4: (Διατηρηση της Στροφορμης)

$\frac{dh}{dt} = 0$ (κινειται σε μια τροχια με το 2ο Νομο του Νευτωνα σ'ενα κεντρικο συντηρητικο πεδιο)

Αποδειξη:



$|i(t)| = |j(t)| = 1$

$$i(t) = (\cos\theta(t), \sin\theta(t))$$

$$\frac{di(t)}{dt} = (-\sin\theta(t), \cos\theta(t))\,\theta'(t) = j(t)\,\theta'(t)$$

$$\frac{dj(t)}{dt} = \frac{d}{dt}(-\sin\theta(t), \cos\theta(t)) = (-\cos\theta(t), -\sin\theta(t))\,\theta'(t) =$$
$$= -i(t)\,\theta'(t)$$

$$x(t) = r(t)\,i(t)$$

$$x'(t) = r'(t)\, i(t) + r(t)\cdot i'(t) =$$
$$= r'(t)\, i(t) + r(t)\, j(t)\, \theta'(t) =$$
$$= r' i + \frac{r^2\theta}{mr} m j$$

$$x''(t) = r'' i + r' i' + \frac{d}{dt}(r^2\theta' m)\frac{j}{mr} + (r^2\theta' m)\frac{d}{dt}\left[\left(\frac{j}{mr}\right)\right] =$$

$$= \vec{i}\,[r'' - r(\theta')] + \frac{1}{r}\frac{d}{dt}(i^2\theta')\vec{j} = \frac{ri}{m}$$

$$\cdot\ m x'' = F \underset{\uparrow}{=} f(|x|)\, x$$

Λημμα 2

$r^2\theta'$: σταθερο

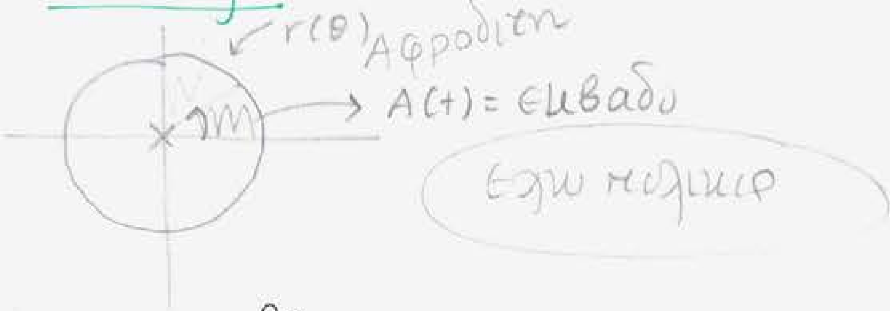
Επομένως, $\frac{d}{dt}(r^2\theta') = 0$

Πορισμα 5: **(2ος Νόμος του Kepler)**

Ισα εμβαδα σε ισους χρονους!

(Διατηρηση Στροφορμης)

Αποδειξη



$$A = \frac{1}{2}\int_{\theta_1}^{\theta_2} r^2(\theta)\, d\theta$$

$$\frac{dA}{d\theta} = \frac{1}{2} r^2(\theta) \quad / \quad \frac{d}{dt} A(\theta(t)) = \frac{dA}{d\theta}\frac{d\theta}{dt} = \frac{1}{2} r^2(\theta)\theta'(t)$$
$$= \text{σταθερο}$$

Θ4