Μάθημα 4ο Ε4. Αριθμητικές Μέθοδοι για Μ.Δ.Ε 3/3/2020

Φραγμένα Γραμμικά Συναρτησιακά

$F: \mathcal{H} \longrightarrow \mathbb{R}$ συναρτησιακό από χώρο Hilbert $\mathcal{H}$ στο $\mathbb{R}$.

Γραμμικό: $F(\lambda v + \mu w) = \lambda \cdot F(v) + \mu F(w) \quad \forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}, \forall v, w \in \mathcal{H}$

Φραγμένο: $\sup\limits_{\substack{v \in \mathcal{H} \\ v \neq 0}} \frac{|F(v)|}{\|v\|} < \infty \qquad \left(\|F\| = \sup\limits_{\substack{v \in \mathcal{H} \\ v \neq 0}} \frac{|F(v)|}{\|v\|} \text{ νόρμα του } F \right)$

Όταν έχω ένα φραγμένο γραμμικό συναρτησιακό, $|F(v)| \leq \|F\| \cdot \|v\|, \forall v \in \mathcal{H}$ (*)

Παρατήρηση: Αν F φραγμένο τότε $F: \mathcal{H} \to \mathbb{R}$ συνεχής.

Έστω $v_n \to v$ στο $\mathcal{H}$ $\Rightarrow \|v_n - v\| \to 0$

$|F(v_n) - F(v)| \overset{\text{γραμ.}}{=} |F(v_n - v)| \overset{(*)}{\leq} \|F\| \, \|v_n - v\| \to 0.$

Ισχύει και το αντίστροφο: Αν F συνεχής $\Longrightarrow$ F φραγμένο

Παράδειγμα Γραμμικού φραγμένου συναρτησιακού

Έστω $g \in \mathcal{H}$ σταθεροποιημένο.

Θεωρώ $F(v) = (v, g) \quad \forall v \in \mathcal{H}$ $\qquad \|F\| = \sup\limits_{\substack{v \neq 0 \\ v \in \mathcal{H}}} \frac{|F(v)|}{\|v\|} \leq \|g\|$

$|F(v)| = |(v,g)| \overset{C\text{-}S}{\leq} \|g\| \cdot \|v\|$

$F(g) = (g,g) = \|g\|^2 \qquad \frac{|F(g)|}{\|g\|} = \|g\|$

Θεώρημα: (Αναπαράστασης του Riesz)

Έστω F φραγμένο γραμμικό συναρτησιακό σε χώρο Hilbert $\mathcal{H}$. Τότε $\exists!\, f \in \mathcal{H}$ τ.ω. $F(v) = (v, f) \ \forall \ v \in \mathcal{H}$.

Μάλιστα $\|F\| = \|f\|$

Απόδειξη: Στις σημειώσεις.

· Πολύ συχνά το βλέπουμε και ως εξής:

Δίδεται το F και θεωρώ την εξίσωση $(v, f) = F(v) \quad \forall v \in \mathcal{H}$. Τότε η εξίσωση έχει μοναδική λύση $f \in \mathcal{H}$ και $\|f\| = \|F\|$

Φραγμένος Γραμμικός Τελεστής $A: \mathcal{H} \to \mathcal{H}$

Φραγμένος: $\|A\| = \sup\limits_{\substack{v\neq 0 \\ v\in\mathcal{H}}} \frac{\|Av\|}{\|v\|} < \infty$

Γραμμικός: $A(\lambda v + \mu w) = \lambda Av + \mu Aw \quad \forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}, \forall v, w \in \mathcal{H}$

Αν $v_n \to v \Rightarrow \|Av_n - Av\| = \|A(v_n - v)\| \leq \|A\| \, \|v_n - v\| \to 0$

$B: A \times A \to \mathbb{R}$ διγραμμική μορφή $\Leftrightarrow \begin{cases} B(\lambda v_1 + \mu v_2, w) = \lambda B(v_1, w) + \mu B(v_2, w) \\ B(v, \lambda w_1 + \mu w_2) = \lambda B(v, w_1) + \mu B(v, w_2) \end{cases}$

Θεώρημα: (Lax-Milgram)

Έστω $B(\cdot,\cdot): \mathcal{H} \times \mathcal{H} \to \mathbb{R}$ διγραμμική μορφή σε πραγματικό χώρο Hilbert $\mathcal{H}$ με τις εξής ιδιότητες:

$\exists\, C_1 \geq 0$, $C_2 > 0$ σταθερές τέτοιες ώστε:

(1) $|B(v,w)| \leq C_1 \|v\| \|w\| \quad \forall v, w \in \mathcal{H}$ (ιδιότητα της "συνέχειας")

(2) $C_2 \|v\|^2 \leq B(v,v) \quad \forall v \in \mathcal{H}$ (Ελλειπτικότητα της B, B θετικά ορισμένη)

Τότε δεδομένου F φραγμένου γραμμικού συναρτησιακού στον $\mathcal{H}$, $\exists!\, u \in \mathcal{H}$ τ.ω. $B(u,v) = F(v) \quad \forall v \in \mathcal{H}$

Μάλιστα $\|u\| \leq \frac{1}{C_2} \|F\|$ (*)

Απόδειξη:

Μοναδικότητα: Έστω ότι $\exists\, u_1, u_2 \in \mathcal{H}$ τω $B(u_1, v) = F(v) \; \forall v \in \mathcal{H}$ και $B(u_2, v) = F(v) \; \forall v \in \mathcal{H}$. Τότε $B(u_1 - u_2, v) = 0 \quad \forall v \in \mathcal{H}$

Διαλέγω $v = u_1 - u_2$ τότε

$$0 \leq C_2 \|u_1 - u_2\|^2 \overset{(2)}{\leq} B(u_1 - u_2, u_1 - u_2) = 0 \Rightarrow u_1 = u_2$$

(*): Έστω $\exists\, u$ λύση : $B(u,v) = F(v) \quad \forall v \in \mathcal{H}$

Για $v = u \Rightarrow$

$$C_2 \|u\|^2 \overset{(2)}{\leq} B(u,u) = F(u) \leq \|F\| \cdot \|u\|$$

$$\Rightarrow \|u\| = \frac{1}{C_2} \|F\|$$

Ε4. Αριθμητικές Μέθοδοι για Μ.Δ.Ε 3/3/2020

Ύπαρξη: $\varphi \in H$ σταθεροποιημένο και ορίζω $\Phi(v) := B(\varphi, v)\ \forall v \in H$

Φ γραμμικό συναρτησιακό στο H

$|\Phi(v)| = |B(\varphi,v)| \overset{(1)}{\leq} C_1 \|\varphi\| \|v\| \quad \forall v \in H$

$\Rightarrow \sup\limits_{\substack{v\neq 0\\ v\in H}} \dfrac{|\Phi(v)|}{\|v\|} \leq C_1 \|\varphi\|$. Άρα Φ φραγμένο

Από Θεώρημα Αναπαράστασης του Riesz, δεδομένου $\varphi \in H$ $\exists!\ \tilde{\varphi} \in H$ τ.ω

$B(\varphi, v) = (v, \tilde{\varphi}) \quad \forall v \in H$

$\varphi \longrightarrow \tilde{\varphi} \quad \rightsquigarrow \quad A\varphi = \tilde{\varphi}$ Άρα θα γράφω $B(\varphi, v) = (v, A\varphi)\ \forall v \in H$.

A γραμμικός τελεστής : $A: H \longrightarrow H$

$\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, $\varphi, \psi \in H$. $\forall v \in H$

$(v, A(\lambda\varphi + \mu\psi)) = B(\lambda\varphi + \mu\psi, v) = \lambda B(\varphi, v) + \mu B(\psi, v) = \lambda(v, A\varphi) + \mu(v, A\psi) =$

$= (v, \lambda A\varphi) + (v, \mu A\psi) = (v, \lambda A\varphi + \mu A\psi)$

(•) Αν $(v,z) = (v,w)\ \forall v \in H \Rightarrow (v, z-w) = 0\ \forall v \in H \Rightarrow$ αν $v = z-w$: $\|z-w\|^2 = 0 \Rightarrow z = w$

Επομένως από (•) $A(\lambda\varphi + \mu\psi) = \lambda A\varphi + \mu A\psi$. Άρα A γραμμικός τελεστής $H \to H$.

Μάλιστα A φραγμένος

$\|A\varphi\|^2 = (A\varphi, A\varphi) = B(\varphi, A\varphi) \leq C_1 \|\varphi\| \|A\varphi\| \Rightarrow \|A\varphi\| \leq C_1 \|\varphi\|$

$\operatorname{Ran} A = \{\psi \in H : \psi = A\varphi\} \underset{\text{υπόχωρος}}{\subset} H$ (Εικόνα του A)

$(\psi_1, \psi_2 \in \operatorname{Ran} A,\ \psi_1 + \psi_2 = A(\varphi_1 + \varphi_2) \Rightarrow \psi_1 + \psi_2 \in \operatorname{Ran} A)$

Θα δείξουμε ότι $\operatorname{Ran} A$ κλειστός υπόχωρος του H.

$B(\varphi, v) = (v, A\varphi) \quad \forall v, \varphi \in H$

Έστω $\psi_n \in \operatorname{Ran} A$ και $\psi_n \xrightarrow[\|\cdot\|]{} \psi \in H$. Θα δείξουμε ότι $\psi \in \operatorname{Ran} A$.

Έστω $\varphi_n \in H$: $A\varphi_n = \psi_n$ τότε $\{\varphi_n\}$ είναι Cauchy στο H

$B(\varphi_n - \varphi_m, v) = (v, A(\varphi_n - \varphi_m)) = (v, \psi_n - \psi_m) \quad \forall v \in H$

"Παγώνω" n, m και διαλέγω $v = \varphi_n - \varphi_m \Rightarrow$

$$B(\varphi_n - \varphi_m, \varphi_n - \varphi_m) = (\varphi_n - \varphi_m, \psi_n - \psi_m) \leq \|\varphi_n - \varphi_m\| \cdot \|\psi_n - \psi_m\|$$

όμως από (2) $C_2 \|\varphi_n - \varphi_m\|^2 \leq B(\varphi_n - \varphi_m, \varphi_n - \varphi_m)$, άρα

$C_2 \|\varphi_n - \varphi_m\| \leq \|\psi_n - \psi_m\| \longrightarrow 0 \overset{C_2 > 0}{\Longrightarrow} \|\varphi_n - \varphi_m\| \longrightarrow 0$

Επομένως $\{\varphi_n\}$ Cauchy στον H

Άρα $\exists\ \varphi \in H$: $\varphi_n \xrightarrow[\|\cdot\|]{} \varphi$

Ισχυρισμός: $\psi = A\varphi$

$$\begin{array}{ccccc} B(\varphi_n, v) & = & (v, \psi_n) & & \\ \downarrow & & \downarrow & \leftarrow & |(v, \psi_n - \psi)| \le \|v\| \, \underbrace{\|\psi_n - \psi\|}_{0} \to 0 \\ B(\varphi, v) & & (v, \psi) & & \end{array}$$

$|B(\varphi_n, v) - B(\varphi, v)| = |B(\varphi_n - \varphi, v)| \le C_1 \|\varphi_n - \varphi\| \to 0$

$$\underset{(v, A\varphi)}{\overset{}{B(\varphi, v)}} = (v, \psi)$$

$(v, A\varphi) = (v, \psi) \quad \forall \; v \in H \implies A\varphi = \psi$