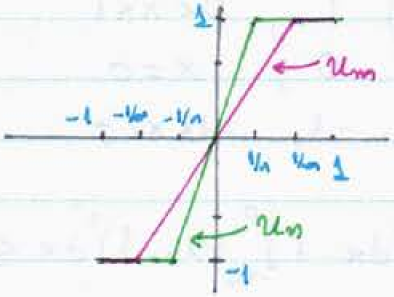
Μάθημα 2ο   Ε4. Αριθμητικές Μέθοδοι για Μ.Δ.Ε   24/2/2020

$V = C(\bar{I}) \qquad I = (-1,1)$

$f,g \in V \qquad (f,g) = \int_{-1}^{1} f(x)g(x)dx$

$\|f\| = \sqrt{\int_{-1}^{1} f^2(x)dx}$



$$u_n(x) = \begin{cases} -1, & x \le -1/n \\ nx, & -1/n < x < 1/n \\ 1, & x \geq 1/n \end{cases} \qquad n=1,2,\ldots$$

1) Υποθέτω $n > m$. Θα δείξω ότι η u_n είναι Cauchy.

$$\|u_n-u_m\|^2 = \int_{-1}^{1} (u_n(x)-u_m(x))^2 dx$$
$$= \int_0^{1/n}(nx-mx)^2dx + \int_{1/n}^{1/m}(1-mx)^2dx + \int_{1/m}^{1}\cancel{(1-1)^2}dx + \int_{-1/n}^{0}(nx-mx)^2dx + \int_{-1/m}^{-1/n}(-1-mx)^2dx + \int_{-1}^{-1/m}\cancel{(-1+1)^2}dx$$
$$\le \int_0^{1/n} 1\,dx + \int_{1/n}^{1/m} 1\,dx + \int_{-1/m}^{-1/n} 1\,dx + \int_{-1/n}^{0} 1\,dx = \frac{1}{n} + \left(\frac{1}{m}-\frac{1}{n}\right) + \frac{1}{n} - \frac{1}{n} + \frac{1}{m} = \frac{2}{m}$$

$\Rightarrow \|u_n - u_m\| \le \sqrt{2/m} \longrightarrow 0, \ n,m \to \infty$

2) Που τείνει η $\{u_n\}$ καθώς $n \to \infty$, ως προς την $\|\cdot\|$;

$\nexists f \in C([-1,1])$ τ.ω. $\|u_n - f\| \to 0, n \to \infty$

Έστω ότι $\exists$ τέτοια f, τότε

$$\|u_n-f\|^2 = \int_{-1}^{1}(u_n-f)^2dx = \int_0^{1/n}(u_n-f)^2dx + \int_{1/n}^{1}(1-f)^2dx + \int_{-1/n}^{0}(u_n-f)^2dx + \int_{-1}^{-1/n}(-1-f)^2dx$$
$$\geq \int_{1/n}^{1}(1-f)^2dx + \int_{-1}^{-1/n}(-1-f)^2 \geq 0$$

$$0 \underset{n\to\infty}{\longleftarrow} \|u_n - f\|^2 \geq \int_{1/n}^{1}(1-f)^2dx \geq 0$$

Άρα $\int_{1/n}^{1}(1-f)^2 \to 0 \Rightarrow \int_0^1 (1-f)^2dx = 0 \Rightarrow$

Άρα $f = \begin{cases} 1, & 0 \le x \le 1 \\ -1, & -1 \le x \le 0 \end{cases}$ → όμως $f \notin C([-1,1])$ → αντίστοιχα δείχνω και για αυτόν τον κλάδο.

Επομένως έχω άτοπο.

(3) Έστω $f = \begin{cases} 1, & 0 < x \le 1 \\ 0, & x = 0 \\ -1, & -1 \le x < 0 \end{cases}$ Τείνει στην f η u_n?

$$\|u_n - f\|^2 = \int_0^{1/n} (u_n - f)^2 dx + \int_{-1/n}^{0} (u_n - f)^2 dx \le \frac{1}{n} + \frac{1}{n} = \frac{2}{n} \longrightarrow 0, \quad n \to \infty$$

Άρα $u_n \xrightarrow[\|\cdot\|]{} f$

(4) Η f ως συνάρτηση, $f : [-1,1] \to \mathbb{R}$ δεν είναι μοναδική.
Θα μπορούσαμε να πάρουμε $f = \begin{cases} 1, & 0 \le x \le 1 \\ -1, & -1 \le x < 0 \end{cases}$

(5) Μπορούμε να πάρουμε κατά τμήματα ομαλές συναρτήσεις.
πχ $u_n(x) = \frac{2}{\pi} \arctan(nx)$

Η f μπορεί να είναι όριο πολλών άλλων ακολουθιών Cauchy στο χώρο

Ο V δεν είναι πλήρης με τη νόρμα αυτή.

Πλήρωση

Οποιοσδήποτε χώρος V με εσωτερικό γινόμενο $(\cdot,\cdot)$ (γενικότερα διανυσματικό χώρο με νόρμα ή μετρικό χώρο) μπορεί να πληρωθεί, με την έννοια ότι μπορεί να ταυτισθεί (μέσω απεικόνισης, 1-1, και ισομετρική) με έναν διανυσματικό χώρο M που είναι πυκνός ($\forall v \in H, \exists \varphi_n \in M$ τ.ω $\varphi_n \xrightarrow{\|\cdot\|} v$) υπόχωρος ενός χώρου Hilbert H (Το εσωτερικό γινόμενο και η νόρμα του H ορίζεται "φυσιολογικά")

Ο H είναι το σύνολο (διανυσματικός χώρος) των κλάσεων ισοδυναμίας ακολουθιών Cauchy $\{u_n\}$ στον V $\quad (\{u_n\} \sim \{v_n\} \Leftrightarrow \|u_n - v_n\| \to 0, n \to \infty)$

Ε4. Αριθμητικές Μέθοδοι για Μ.Δ.Ε

24/2/2020

Ο H λέγεται πλήρωση (→ closure/completion) του V ως προς τη νόρμα $\|\cdot\|$ και συμβολίζεται : $\overline{V}^{\|\cdot\|} = H$

$\overline{C(-1,1)}^{\|\cdot\|} = L^2(-1,1)$

- M κλειστός υπόχωρος του $H \iff$ αν $u_n \in M$ και $u_n \xrightarrow[\|\cdot\|]{} u$ τότε $u \in M$.
- Αν $\dim M < \infty$ τότε M κλειστός.

Θεώρημα Προβολής

Έστω χώρος Hilbert H $((\cdot,\cdot) \to \|\cdot\|)$ και έστω M κλειστός υπόχωρος του H, τότε δεδομένου $h \in H$:

(i) $\exists!\, g \in M$ τ.ω $\|h-g\| = \inf_{\varphi \in M} \|h-\varphi\|$

Το g λέγεται βέλτιστη προσέγγιση του h ως προς την $\|\cdot\|$ από στοιχεία του M.

(ii) εναλλακτικά το g μπορεί να οριστεί ως $(h-g, \varphi) = 0 \ \forall \varphi \in M$

Το g λέγεται ορθή προβολή του h στον M.

Μάθημα 3º   Ε4. Αριθμητικές Μέθοδοι για Μ.Δ.Ε   25/12/2020

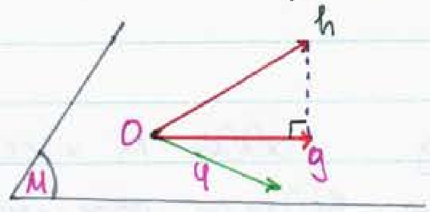
Θεώρημα Προβολής

$\mathcal{H}$ χώρος Hilbert $(\cdot,\cdot) \rightsquigarrow \|\cdot\|$, M κλειστός υπόχωρος του $\mathcal{H}$, δεδομένου $h \in \mathcal{H}$
$\exists!\, g \in M$:

(i) $\|h-g\| = \inf_{\varphi \in M} \|h-\varphi\|$

$\Updownarrow$

(ii) $(h-g, \varphi) = 0 \ \forall \varphi \in M$



Απόδειξη

(i) Ύπαρξη του g

Δίχως βλάβη της γενικότητας $h \notin M \rightsquigarrow \inf_{\varphi \in M} \|h-\varphi\| = \delta > 0$

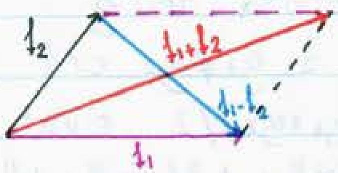
$\exists\, \varphi_n \in M$ τω $\|h-\varphi_n\| \to \delta$, $n \to \infty$

(α) $\{\varphi_n\}$ Cauchy

Χρησιμοποιούμε την ακόλουθη ιδιότητα:

Ιδιότητα του παραλληλογράμμου

f_1, f_2 σε χώρο με εσωτερικό γινόμενο τότε:
$\|f_1+f_2\|^2 + \|f_1-f_2\|^2 = 2\|f_1\|^2 + 2\|f_2\|^2$



Παρατήρηση: Ένας χώρος με νόρμα, έχει νόρμα που προέρχεται από εσωτερικό $\Leftrightarrow$ ισχύει η ιδιότητα του παραλληλογράμμου.

Θέλω να δείξω ότι $\|\varphi_n - \varphi_m\| \xrightarrow[n,m\to\infty]{} 0$, έστω $f_1, f_2 \in \mathcal{H}$

Επιλέγω $f_1 = h-\varphi_n$ και $f_2 = h-\varphi_m$ τότε

$\|2h - (\varphi_n+\varphi_m)\|^2 + \|\varphi_n - \varphi_m\|^2 = 2\|h-\varphi_n\|^2 + 2\|h-\varphi_m\|^2$

$\Rightarrow \|\varphi_n-\varphi_m\|^2 = 2\cdot\underbrace{\|h-\varphi_n\|^2}_{\downarrow\,\delta} + 2\cdot\underbrace{\|h-\varphi_m\|^2}_{\downarrow\,\delta} - 4\left\|h - \frac{\varphi_n+\varphi_m}{2}\right\|^2 = 2\delta^2 + 2\delta^2 - 4\left\|h - \frac{\varphi_n+\varphi_m}{2}\right\|^2$

Κοιτάμε το $\left\|h - \frac{\varphi_n+\varphi_m}{2}\right\| = \left\|\frac{1}{2}h + \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\varphi_n - \frac{1}{2}\varphi_m\right\| \le \frac{1}{2}\|h-\varphi_n\| + \frac{1}{2}\|h-\varphi_m\|$

Συμπέρασμα $\overline{\lim_{n,m\to\infty}} \left\|h - \frac{\varphi_n+\varphi_m}{2}\right\| \le \frac{1}{2}\delta + \frac{1}{2}\delta = \delta$

$\frac{\varphi_n+\varphi_m}{2} \in M \rightsquigarrow \left\|h - \frac{\varphi_n+\varphi_m}{2}\right\| \geq \inf_{\varphi \in M} \|h-\varphi\| = \delta$

άρα $\delta \le \underline{\lim_{n,m\to\infty}} \left\|h - \frac{\varphi_n+\varphi_m}{2}\right\| \le \overline{\lim_{n,m\to\infty}} \left\|h - \frac{\varphi_n+\varphi_m}{2}\right\| \le \delta$

Επομένως $\exists \lim_{m,n\to\infty} \| h - \frac{\varphi_n+\varphi_m}{2} \| = \delta$

συνεπώς $0 \le \|\varphi_n - \varphi_m\|^2 \le 0 \implies \{\varphi_n\}$ Cauchy

(β) Ύπαρξη του g

$\exists\, g \in H$ τω $\varphi_n \xrightarrow[n\to\infty]{\|\cdot\|} g$, αλλά M κλειστό $\implies g \in M$

Θα δείξουμε ότι g η βέλτιστη προσέγγιση

$\|h-g\| \le \|\underbrace{h-\varphi_n}_{\delta}\| + \|\underbrace{\varphi_n - g}_{0}\| \implies 0 \le \|h-g\| \le \delta$

όμως $g \in M \rightsquigarrow \inf_{\varphi\in M} \|h-\varphi\| \le \|h-g\|$

Άρα $\|h-g\| = \delta \implies g$ είναι η βέλτιστη προσέγγιση

(γ) Μοναδικότητα του g

Έστω ότι $\exists\, g_1 \neq g_2 \in M$ τω $\|h-g_1\| = \delta$ και $\|h-g_2\| = \delta$

τότε και $(g_1+g_2)/2$ είναι βέλτιστη προσέγγιση

$\delta \le \| h - \frac{g_1+g_2}{2} \| \le \frac{1}{2}\|h-g_1\| + \frac{1}{2}\|h-g_2\| = \delta.$

$\implies \| h - \frac{g_1+g_2}{2} \| = \| \frac{h-g_1}{2} \| + \| \frac{h-g_2}{2} \|$

Έστω $x = \frac{h-g_1}{2}$ και $y = \frac{h-g_2}{2}$

Τότε $\|x+y\| = \|x\| + \|y\| \iff \exists\, \lambda \ge 0 : x = \lambda y$ ή $\exists\, \mu \ge 0 : y = \mu x$

Έστω $x = \lambda y$ άρα $\frac{h-g_1}{2} = \lambda \frac{h-g_2}{2} \implies (1-\lambda) h = g_1 - \lambda g_2$

Διακρίνουμε 2 περιπτώσεις

(1) $\lambda = 1 \implies 0 = g_1 - g_2 \implies g_1 = g_2$ Άτοπο

(2) $\lambda \neq 1$ $h = \frac{g_1 - \lambda g_2}{(1-\lambda)} \in M \implies h \in M$ Άτοπο.

(ii) $\implies$ (i) $g \in M : (h-g, \varphi) = 0 \quad \forall \varphi \in M$

$\|h-g\|^2 = (h-g, h-g) = (h-g, h) = (h-g, h-x) \overset{C\text{-}S}{\underset{\forall x\in M}{\le}} \|h-g\|\|h-x\| = \|h-g\| \inf_{x\in M} \|h-x\|$

$\inf_{x\in M} \|h-x\| \underset{g\in M}{\le} \|h-g\| \le \inf_{x\in M} \|h-x\| \implies \|h-g\| = \inf_{\varphi\in M} \|h-\varphi\|$ Άρα το (i)

Ε4. Αριθμητικές Μέθοδοι για ΜΔΕ

25/2/2020

(i) $\Rightarrow$ (ii) $g \in M$ πληροί το (i) και έστω $h-g \not\perp M$, άρα $\exists\, \varphi^* \in M$: $(h-g, \varphi^*) \neq 0$

Ορίζω $g^* = g + \frac{(h-g,\varphi^*)}{\|\varphi^*\|^2} \cdot \varphi^* \in M \quad (g^* \neq g)$

$$\|h-g^*\|^2 = (h-g^*, h-g^*) = \left(h-g - \frac{(h-g,\varphi^*)}{\|\varphi^*\|^2}\varphi^*, h-g - \frac{(h-g,\varphi^*)}{\|\varphi^*\|^2}\varphi^*\right)$$

$$= \|h-g\|^2 + \left\|\frac{(h-g,\varphi^*)\varphi^*}{\|\varphi^*\|^2}\right\|^2 - 2\left(h-g, \frac{(h-g,\varphi^*)}{\|\varphi^*\|^2}\varphi^*\right)$$

$$= \|h-g\|^2 + \frac{(h-g,\varphi^*)^2}{\|\varphi^*\|^4}\|\varphi^*\|^2 - 2\frac{(h-g,\varphi^*)}{\|\varphi^*\|^2}(h-g,\varphi^*)$$

$$= \|h-g\|^2 + \frac{(h-g,\varphi^*)^2}{\|\varphi^*\|^2} - 2\frac{(h-g,\varphi^*)^2}{\|\varphi^*\|^2}$$

$$\Rightarrow \|h-g^*\|^2 = \|h-g\|^2 - \frac{(h-g,\varphi^*)^2}{\|\varphi^*\|^2}$$

$$\Rightarrow \inf_{\varphi\in M}\|h-\varphi\| \le \|h-g^*\| \le \|h-g\| \le \inf_{\varphi\in M}\|h-\varphi\| \Rightarrow \|h-g^*\| = \|h-g\| \Rightarrow g^* = g \text{ Άτοπο.} \blacksquare$$

Έστω $N = \dim M < \infty$ τότε $\exists \{\varphi_i\}_{i=1}^N$ βάση του M. Γνωρίζω το h και τη βάση, ψάχνω το g.

$$(g,\varphi) = (h,\varphi) \ \forall \varphi \in M \iff (g,\varphi_i) = (h,\varphi_i) \quad 1 \le i \le N \quad \text{(κανονικές εξισώσεις)}$$

Έστω $g = \sum_{i=1}^N c_i\varphi_i$ ψάχνω τα c_i $\quad 1 \le i \le N$

$\left(\sum_{j=1}^N c_j\varphi_j, \varphi_i\right) = (h,\varphi_i)$ (Το $h \notin M$ άρα δεν γράφεται σαν γραμμικός συνδυασμός)

$\sum_{j=1}^N c_j(\varphi_j,\varphi_i) = (h,\varphi_i)$ $\quad G_{N\times N}: G_{ij} = (\varphi_j,\varphi_i)$ συμμετρικός (Πίνακας Gram ή πίνακας μάζας)

$\Downarrow$

$$\sum_{j=1}^N G_{ij}c_j = (h,\varphi_i) \quad 1 \le i \le N \qquad G\cdot C = \begin{bmatrix}(h,\varphi_1)\\ \vdots \\ (h,\varphi_N)\end{bmatrix}$$

G θετικά ορισμένος : $d \in \mathbb{R}^N \Rightarrow d^T G d \geq 0$, αν $d^T G d = 0 \Rightarrow d = 0$

$$d^T G d = \sum_{j,i=1}^{N} d_i G_{ij} d_j = \sum_{j,i=1}^{N} d_i (\varphi_j, \varphi_i) d_i = \left(\sum_{j=1}^{N} d_j \varphi_j , \sum_{i=1}^{N} d_i \varphi_i \right) \quad \left(x = \sum_{i=1}^{N} d_i \varphi_i \in M \right)$$

$$\Rightarrow d^T G d = \|x\|^2 \geq 0$$

αν $d^T G d = 0 \Rightarrow x = 0 = \sum_{i=1}^{N} d_i \varphi_i \Leftrightarrow d_i = 0 \ \forall i \Rightarrow d = 0$