Μάθημα 1ο   Ε4. Αριθμητικές Μέθοδοι για Μ.Δ.Ε   17/2/2020

Χώροι Hilbert

Ορισμός: Χώρος Hilbert είναι διανυσματικός χώρος, με εσωτερικό γινόμενο, που είναι πλήρης

V διανυσματικός χώρος (επί του $\mathbb{R}$), μπορούμε να ορίσουμε πρόσθεση
$u, v \in V \rightarrow u + v \in V$
και πολλαπλασιασμό με το $\mathbb{R}$
$u \in V, \lambda \in \mathbb{R} \rightarrow \lambda u \in V$

Θα μιλάμε συχνά για χώρους πεπερασμένης διάστασης (πχ $V = \mathbb{R}^d$), $\dim V < \infty$
Δηλαδή $\exists \{u_i\}_{i=1}^{n}$ γραμμικά ανεξάρτητα τω. $\forall v \in V$, $v = \sum_{i=1}^{n} c_i v_i$,
$c_i \in \mathbb{R}$ μονοσήμαντα ορισμένα.

Χώρος με εσωτερικό γινόμενο, $u, v \in V$, $(u, v) \in \mathbb{R}$ (εσωτερικό γινόμενο)
$(\cdot,\cdot) : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ (συμμετρική, διγραμμική, θετικά ορισμένη μορφή)

Ιδιότητες Εσωτερικού γινομένου (συνιστούν τον ορισμό του)
i) $(u,u) \geq 0$, αν $(u,u) = 0 \Rightarrow u = 0$
ii) $(u,v) = (v,u)$ $\forall u, v \in V$ (αν ήμουν επί του $\mathbb{C}$ $(u,v) = \overline{(v,u)}$)
iii) $(\lambda u + \mu v, w) = \lambda(u,w) + \mu(v,w)$ $\forall u, v, w \in V$ $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}$

Παράδειγμα: $V = \mathbb{R}^d$, $u = \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_d \end{pmatrix}$, $v = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_d \end{pmatrix}$

$(u,v) = \sum_{i=1}^{d} u_i v_i$ (Ευκλείδειο Εσωτερικό γινόμενο)

Νόρμα : $\|\cdot\| : V \rightarrow [0, \infty)$
$u \in V$ δx : $\|u\| = \sqrt{(u,u)}$ νόρμα του V που παράγεται από εσωτερικό γινόμενο $(\cdot,\cdot)$

Ανισότητα Cauchy-Schwarz

$|(u,v)| \leq \|u\| \cdot \|v\| \quad \forall\, u, v \in V$

π.χ στον $\mathbb{R}^d$ $\quad \left|\sum_{i=1}^{d} u_i v_i\right| \leq \sqrt{\sum_{i=1}^{d} u_i^2} \cdot \sqrt{\sum_{i=1}^{d} v_i^2}$

Ιδιότητες νόρμας

i) $\|u\| \geq 0$, $\|u\| = 0 \Rightarrow u = 0$

ii) $\|\lambda u\| = |\lambda| \cdot \|u\|$, $\lambda \in \mathbb{R}$, $u \in V$ (ομογενής)

iii) $\|u+v\| \leq \|u\| + \|v\|$ (Τριγωνική ανισότητα)

Απόδειξη της ιδιότητας (iii)

$$\|u+v\|^2 = (u+v, u+v) = (u,u) + (u,v) + (v,u) + (v,v) = \|u\|^2 + 2(u,v) + \|v\|^2$$

$$\underset{C\text{-}S}{\leq} \|u\|^2 + 2\|u\| \cdot \|v\| + \|v\|^2 = (\|u\| + \|v\|)^2 \Rightarrow \|u+v\| \leq \|u\| + \|v\|$$

Έστω $\rho(u,v) = \|u - v\|$ (Η μετρική που επάγεται από τη νόρμα)

Σύγκλιση: Έστω $u_n, u \in V$ $\quad u_n \to u$, $n \to \infty \Leftrightarrow \|u_n - u\| \to 0$, $n \to \infty$

Δηλαδή $\forall\, \varepsilon > 0 \;\; \exists\, N : n \geq N : \|u_n - u\| \leq \varepsilon$

Ορισμός: $\{u_n\}$ είναι Cauchy (ή βασική), $u_n \in V$, αν $\|u_n - u_m\| \to 0$, καθώς $n, m \to \infty$. Δηλαδή $\forall\, \varepsilon > 0 \;\; \exists\, N : m, n \geq N \;\; \|u_n - u_m\| \leq \varepsilon$

Αν $\{u_n\}$ Cauchy δεν συγκλίνει αναγκαστικά, δηλαδή μπορεί να μην $\exists\, u \in V$ τω $u_n \to u$, $n \to \infty$

Πλήρης: Κάθε ακολουθία Cauchy συγκλίνει (σε αυτόν τον χώρο ως προς την νόρμα)

Παραδείγματα χώρων Hilbert

1) $V = \mathbb{R}^d$ με ευκλείδειο εσωτερικό γινόμενο.

$(u,v) = \sum_{i=1}^{d} u_i v_i$, $\quad u = (u_1, \dots, u_d)^T$, $\; v = (v_1, \dots, v_d)^T$ $\quad \|u\| = \left(\sum_{i=1}^{d} u_i^2\right)^{1/2}$

$u^{(n)}$ ακολουθία Cauchy στον $V \Rightarrow \|u^{(n)} - u^{(m)}\| \to 0$, $m, n \to \infty$

Ε4. Αριθμητικές Μέθοδοι για ΜΔΕ

$\Rightarrow \sum_{i=1}^{d} (u_i^{(m)}-u_i^{(n)})^2 \to 0$, $m,n\to\infty \Rightarrow \forall\ 1\le i\le d$ $|u_i^{(m)}-u_i^{(n)}| \to 0$

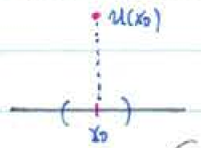
Επομένως $\forall i$, $\{u_i^{(n)}\}_{n=1}^{\infty}$ είναι ακολουθία Cauchy πραγματικών αριθμών.
Αλλά κάθε ακολουθία Cauchy στο $\mathbb{R}$ συγκλίνει. Δηλαδή $\exists\, u_i\ \forall i$ τ.ω
$u_i^{(n)} \to u_i$, $n\to\infty$, $1\le i\le d$.
Ορίζω $u = \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_d \end{pmatrix}$.
Τότε $\|u^{(n)}-u\| = \left(\sum_{i=1}^{d}(u_i^{(n)}-u_i)^2\right)^{1/2} \to 0$, $n\to\infty \Rightarrow u^{(n)}\to u$, $n\to\infty$
Άρα $\mathbb{R}^d$ πλήρης.

2) $\ell_2 = \{u=(u_1,u_2,\dots),\ u_i\in\mathbb{R} : \sum_{i=1}^{\infty} u_i < \infty\}$ (Τετραγωνικά αθροίσιμες ακολουθίες πραγματικών)

$u+v = (u_1+v_1,\dots)$, $\lambda u = (\lambda u_1, \lambda u_2, \dots)$
$(u,v)_{\ell_2} = \sum_{i=1}^{\infty} u_i v_i$ $\quad \|u\|_{\ell_2} = \sqrt{\sum_{i=1}^{\infty} u_i^2}$

ο ℓ_2 είναι πλήρης αν $\|u^{(n)}-u^{(m)}\|_{\ell_2} \to 0$, $m,n\to\infty$ $\quad \exists\ u^{(n)} \xrightarrow[\|\cdot\|_{\ell_2}]{} u$

3) $V = C(\bar{I})$, $I=(\alpha,\beta)\subseteq\mathbb{R}$, $\bar{I}=[\alpha,\beta]$
$C(\bar{I})$ ο χώρος των συνεχών πραγματικών συναρτήσεων στο $\bar{I}$
$f:\bar{I}\to\mathbb{R}$, συνεχής στο $\bar{I}$
$f,g\in C(\bar{I})$
$h=f+g$: $h(x)=f(x)+g(x)\ \forall x\in\bar{I}$, $h\in C(\bar{I})$
$h=\lambda\cdot f$: $h(x)=\lambda\cdot f(x)\ \forall x\in\bar{I}$, $\lambda\in\mathbb{R}$, $h\in C(\bar{I})$
$u,v\in C(\bar{I})$ Ορίζω $(u,v) := \int_I uv = \int_\alpha^\beta u(x)\cdot v(x)\,dx$
$(u,v)\ge 0$ $\quad \int_I u^2\,dx \ge 0$ $\qquad (u,u)=0 \rightsquigarrow \int_\alpha^\beta u^2\,dx = 0 \Rightarrow u\equiv 0$ στο $\bar{I}$
Αυτό ισχύει γιατί έστω ότι $\exists\ x_0\in(\alpha,\beta)$ τ.ω $u(x_0)\neq 0$, π.χ $u(x_0)>0$.



$\exists\ x\in(x_0-\varepsilon, x_0+\varepsilon)$ τ.ω $u(x)>0 \rightsquigarrow 0=\int_\alpha^\beta u^2(x)\,dx = \int_{x_0-\varepsilon}^{x_0+\varepsilon} u^2(x)\,dx > 0$ Άτοπο
$\Rightarrow u\equiv 0$. $\qquad \|u\| = \sqrt{\int_\alpha^\beta u^2(x)\,dx}$
Cauchy-Schwarz: $\left|\int_\alpha^\beta uv\right| \le \|u\|\cdot\|v\|$, $(u,v)=(v,u)$, $(\lambda u+\mu v, w) = \lambda(u,w)+\mu(v,w)$
Αλλά ο $C(\bar{I})$ με $(u,v)=\int_I uv$ ΔΕΝ ΕΙΝΑΙ πλήρης.