Μάθημα 10ο   Ε2. Μέθοδοι Εφαρμοσμένων Μαθηματικών ΙΙ (Αθανασιάδης)   18/12/2018

Ασκήσεις.

1) Να επαληθεύσετε ότι η συνάρτηση

$$g(x,\xi) = \xi(1-x)H(x-\xi) + x(1-\xi)H(\xi-x)$$

ικανοποιεί το πρόβλημα συνοριακών τιμών

$$\begin{cases} -g''(x,\xi) = \delta(x-\xi) \\ g(0,\xi) = g(1,\xi) = 0 \end{cases}$$

2) Να αποδειχθεί ότι η $g(x,\xi) = \frac{1}{2}|x-\xi|$ είναι θεμελειώδης λύση του τελεστή $L = \frac{d^2}{dx^2}$ στο $\mathbb{R}$.

Υπόδειξη:

$$(Lu,\varphi) = (\delta_\xi,\varphi) = \varphi(\xi)$$

$$Lg(x,\xi) = \delta(x-\xi)$$

$$(Lg(x,\xi),\varphi(x)) = (\delta(x-\xi),\varphi(x)) = \varphi(\xi)$$

$$(g''(x,\xi),\varphi(x)) = (g(x,\xi),\varphi''(\xi)) = \int_{-\infty}^{\infty} g(x,\xi)\varphi''(x)dx =$$

$$= -\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\xi}(x-\xi)\varphi''(x)dx + \frac{1}{2}\int_{\xi}^{\infty}(x-\xi)\varphi''(x)dx =$$

$$= -\frac{1}{2}(x-\xi)'\varphi'(x)\Big|_{-\infty}^{\xi} + \int_{-\infty}^{\xi}\varphi'(x)dx + \frac{1}{2}(x-\xi)'\varphi'(x)\Big|_{\xi}^{\infty} + \frac{1}{2}\int\varphi'(x)dx = \varphi(\xi)$$

3) Είναι συνάρτηση δοκιμής η $\varphi(x) = x(1-x)$, $x\in(0,1)$;

4) $f(x) = \frac{1}{x}$, $(0,1)$ είναι τοπικά ολοκληρώσιμη

5) Να υπολογιστεί $\left(\frac{d}{dx} - \lambda\right)\left(H(x)e^{\lambda x}\right)$ στο $D(\mathbb{R})$, $\lambda\in\mathbb{R}$

Υπόδειξη:

$$\left(\left(\frac{d}{dx}-\lambda\right)\left(H(x)e^{\lambda x}\right), \varphi(x)\right) = \dots = \delta(x)$$

6 Να αποδειχθεί ότι μια θεμελειώδης λύση του τελεστή Laplace είναι:

(i) $g(x,y) = \frac{1}{4\pi}\ln(x^2+y^2)$ στον $\mathbb{R}^2$ | με πόλο το $\vec{0}$

(ii) $g(x,y) = \frac{1}{4\pi}\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$ στον $\mathbb{R}^3$

Γενικότερα

(i) $g(x,y;\xi,\eta) = \frac{1}{4\pi} \ln\left[(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2\right]$ με πόλο (ξ,η)

(ii) $g(x,y,z;\xi,\eta,\zeta) = \frac{1}{4\pi} \frac{1}{\sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+(z-\zeta)^2}}$ με πόλο (ξ,η,ζ)

Κατανομές βραδείας αύξησης

Μετασχηματισμός Fourier

$$\mathcal{F}\{f\} = (Ff)(\xi) = \hat{f}(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{ix\xi} f(x)\,dx$$

Αν η f τοπικά ολοκληρώσιμη (την βλέπω σαν κατανομή)
τότε η $(\hat{f},\varphi) = \int_{-\infty}^{\infty}\left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{ix\xi} f(x)\,dx\right)\varphi(\xi)\,d\xi = \int_{-\infty}^{\infty}\left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{ix\xi}\varphi(\xi)\,d\xi\right) f(x)\,dx = (f,\hat{\varphi})$

Για να υπάρχει αυτός ο μετασχηματισμός θα πρέπει να είναι η μηδενική.

Για να ορίσουμε κατανομή στην μετασχηματισμένη κατά fourier συνάρτηση πρέπει να πάρουμε τις συναρτήσεις δοκιμής από μια άλλη κλάση

$$S = \left\{ u \in C^{\infty} : \left|\frac{d^k u}{dx^k}\right| = O\left(\frac{1}{|x|^N}\right), |x| \to \infty, \forall k \in \mathbb{N}, N \in \mathbb{Z} \right\} \quad (\text{Schwartz})$$

$$f = O(g),\ x \to \infty \iff \left|\frac{f}{g}\right| \le M$$

Βασικές Ιδιότητες.

1) Αν $|x^n \varphi^{(k)}(x)| \le M \Rightarrow \varphi \in S$
2) Αν $\varphi \in S \Rightarrow \varphi$: απολύτως ολοκληρώσιμη
3) Αν $\varphi \in S \Rightarrow \hat{\varphi} \in S$

Σύγκλιση στο S

$\varphi_m, \varphi \in S$: $\varphi_m \to \varphi \iff x^n \varphi_m^{(k)}(x) \xrightarrow[m\to\infty]{} x^n \varphi^{(k)}(x)$ (ομοιόμορφα).

Ιδιότητα Σύγκλισης

$\varphi_m \to \varphi \Rightarrow (\varphi_m' \to \varphi',\ p(x)\varphi_m \to p(x)\varphi)$

Θεώρημα: Αν η f κατανομή βραδείας αύξησης $\Rightarrow \hat{f}$ κατανομή βραδείας αύξησης.