Μάθημα 6ο Ε2. Μέθοδοι Εφαρμοσμένων Μαθηματικών ΙΙ (Αθανασιάδης) 20/11/2019

Συναρτήσεις Green (Υπενθύμιση)

Πρόβλημα Sturm-Liouville

$Au = -(pu')' + qu = f \quad , \alpha < x < \beta$

$B_1 u(\alpha) = \alpha_1 u(\alpha) + \alpha_2 u'(\alpha) = 0$ A: διαφορικός τελεστής

$B_2 u(\beta) = \beta_1 u(\beta) + \beta_2 u'(\beta) = 0$

$p, p', q, f \in C[\alpha, \beta] \ , p > 0$

$|\alpha_1| + |\alpha_2| > 0 \ , \ |\beta_1| + |\beta_2| > 0$

$Lu = f$ L: τελεστής που περιέχει και συνοριακές συνθήκες

$u = L^{-1} f$ ($\lambda \neq 0$ ιδιοτιμή) $u(x) = (L^{-1} f)(x) = \int_\alpha^\beta g(x,\xi) f(\xi)\, d\xi$

$g(x,\xi)$: συνάρτηση Green

$$g(x,\xi) : \begin{cases} -\dfrac{u_1(x)\, u_2(\xi)}{p(\xi)\, w(\xi)} & , x < \xi \\ -\dfrac{u_1(\xi)\, u_2(x)}{p(\xi)\, w(\xi)} & , \xi < x \end{cases}$$ (συμμετρικός πυρήνας)

όπου u_1, u_2 γραμμικά ανεξάρτητες λύσεις της $Au = 0$

u_1: ικανοποιεί συνοριακές συνθήκες στο α

u_2: ικανοποιεί συνοριακές συνθήκες στο β

$w(\xi) = w(u_1, u_2)(\xi) = \begin{vmatrix} u_1(\xi) & u_2(\xi) \\ u_1'(\xi) & u_2'(\xi) \end{vmatrix}$ ορίζουσα Wronski

Ιδιότητες

(α) $Ag(x,\xi) = 0$ ως προς x

(β) Η $g(x,\xi)$ ικανοποιεί τις συνοριακές συνθήκες (ως προς x)

(γ) $g(x,\xi)$: συνεχής στο $[\alpha,\beta] \times [\alpha,\beta]$

(δ) $\dfrac{\partial g}{\partial x}(x,\xi)$ ή $\dfrac{dg}{dx}$ ή $g'(x,\xi)$ (ως προς x)

Η g' παρουσιάζει άλμα ασυνέχειας στο $x = \xi$, δηλαδή στο $x = \xi$:

$$g'(\xi^+, \xi) - g'(\xi^-, \xi) = -\frac{1}{p(\xi)}$$

Ασκήσεις

1) Να βρεθεί η συνάρτηση Green

$$\begin{cases} u'' = f(x) & , \ 0<x<1 \\ u(0)=u'(0) & , \ u(1)=u'(1) \end{cases}$$

$1^{ο}$ βρίσκω τη γενική λύση της ομογενής

$Au=0 \Rightarrow u''=0 \Rightarrow u(x)=k_1+k_2x$

(θέλω u_1,u_2 γραμμικά ανεξάρτητες της ομογενούς και η κάθε μια να ικανοποιεί μια συνοριακή συνθήκη)

άρα

$$g(x,\xi)=\begin{cases} c_1+c_2x & , \ x<\xi \\ c_3+c_4x & , \ x>\xi \end{cases} \quad \text{με } g'(x,\xi)=\begin{cases} c_2 & , \ x<\xi \\ c_4 & \ x>\xi \end{cases}$$

$2^{ο}$ Θέλω να ικανοποιεί τις συνοριακές συνθήκες

$$\left.\begin{aligned} g(0,\xi)=g'(0,\xi) &\overset{(x<\xi)}{\Longrightarrow} c_1=c_2 \\ g(1,\xi)=g'(1,\xi) &\overset{(x>\xi)}{\Longrightarrow} c_3+c_4=c_4 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{aligned} c_1&=c_2 \\ c_3&=0 \end{aligned}$$

Επομένως $g(x,\xi)=\begin{cases} c_1(1+x) & , \ x<\xi \\ c_4x & , \ x>\xi \end{cases}$ (1) με $g'(x,\xi)=\begin{cases} c_1, & x<\xi \\ c_4, & x>\xi \end{cases}$

$3^{ο}$ $g(x,\xi)$ συνεχής στο $x=\xi$:

Από (1) $c_1(1+\xi)=c_4\xi$ (2)

$4^{ο}$ g' ασυνεχής στο $x=\xi$

$g'(\xi^+,\xi)-g'(\xi^-,\xi)=-\frac{1}{p(\xi)}$ $(p(x)=1)$ άρα $c_4-c_1=-1$ (3)

$(2),(3) \Rightarrow c_1(1+\xi)=(c_1-1)\xi \Leftrightarrow c_1+c_1\xi=c_1\xi-\xi \Leftrightarrow c_1=-\xi$

$c_4=-\xi-1$

η (1) γίνεται: $g(x,\xi)=\begin{cases} -\xi(1+x) & , \ x<\xi \\ -(1+\xi)x & , \ x>\xi \end{cases}$

Παρατήρηση: Αν έλεγε να λυθεί το πρόβλημα $u''=x^2$ τότε, αφού βρω Green

$u(x)=(L^{-1}f)(x)=\int_a^b g(x,\xi)f(\xi)\,d\xi$

Ε2. Μέθοδοι Εφαρμοσμένων Μαθηματικών ΙΙ

20/11/2019

2 $\begin{cases} u'' + u = f(x) & 0 < x < 1 \\ u(0) = 0 & , u(1) = 0 \end{cases}$

1º Λύνω ομογενή : $Au = 0$: $u'' + u = 0$ $\rightsquigarrow$ λύση $u(x) = k_1 \sin x + k_2 \cos x$

άρα

$$g(x,\xi) = \begin{cases} C_1 \sin x + C_2 \cos x & , 0 < x < \xi < 1 \\ C_3 \sin x + C_4 \cos x & , 0 < \xi < x < 1 \end{cases}$$

2º 1η σσ: $g(0,\xi) = 0 \implies C_2 = 0$

2η σσ: $g(1,\xi) = 0 \implies C_3 \sin 1 + C_4 \cos 1 = 0 \implies C_3 = -C_4 \dfrac{\cos 1}{\sin 1}$

άρα $g(x,\xi) = \begin{cases} C_1 \sin x & , x < \xi \\ C_4\left(-\dfrac{\cos 1}{\sin 1} \sin x + \cos x\right) & , \xi < x \end{cases}$ (1)

3º $g(x,\xi)$ συνεχής $x = \xi$: $C_1 \sin\xi = \dfrac{C_4}{\sin 1} \sin(1-\xi)$ (2)

4º ασυνέχεια της g' στο $x = \xi$ όπου $g'(x,\xi) = \begin{cases} C_1 \cos x & , x < \xi \\ -\dfrac{C_4}{\sin 1} \cos(1-x) & , x > \xi \end{cases}$

$\implies g'(\xi^+,\xi) - g'(\xi^-,\xi) = -\dfrac{1}{p(\xi)} \implies$

$-\dfrac{C_4}{\sin 1}\cos(1-\xi) - C_1 \cos\xi = -1$ (3)

Λύνω σύστημα (2), (3) και βρίσκω C_1, C_4.

Θεώρημα: Αν $Lu = 0$ έχει μια μη τετριμμένη λύση φ, τότε $Lu = f$ έχει λύση αν και μόνο αν $(\varphi, f) = \int_\alpha^\beta \varphi(x) f(x)\, dx$

Απόδειξη:

Υποθέτουμε ότι το πρόβλημα $Lu = f$ έχει λύση u. Θα δείξουμε ότι $(\varphi, f) = 0$

Πράγματι $(\varphi, f) = (\varphi, Lu)$, επειδή η $Lu = f$ "κρύβει" και τις συνθήκες

παίρνω $Au = f$

$(\varphi, f) = (\varphi, Au) = -\int_\alpha^\beta \varphi(x)(pu')'dx + \int_\alpha^\beta \varphi(x) q u\, dx$, όπου $\int_\alpha^\beta \varphi(x)(pu')'dx = [\varphi(pu')]_\alpha^\beta - \int_\alpha^\beta \varphi' p u' dx$

$= [\varphi p u']_\alpha^\beta - [\varphi' p u]_\alpha^\beta + \int_\alpha^\beta (\varphi' p)' u\, dx = [p(\varphi u' - \varphi' p)]_\alpha^\beta + \int_\alpha^\beta (p\varphi')' u\, dx$

Επομένως $(\varphi, f) = [p(\varphi u' - \varphi' u)]_\alpha^\beta + \int_\alpha^\beta (\overset{0}{\cancel{A\varphi}}) u\, dx$, όπου $A\varphi = -(p\varphi')' + q\varphi$
άρα
$(\varphi, f) = [p(\varphi u' - \varphi' u)]_\alpha^\beta = p(\alpha)(\varphi(\alpha)u'(\alpha) - \varphi'(\alpha)u(\alpha)) - p(\beta)(\varphi(\beta)u'(\beta) - \varphi'(\beta)u(\beta)) = \ldots = 0$
Αντίστροφα
$u(x) = C \cdot \varphi(x) + \int_\alpha^\beta g(x,\xi) f(\xi)\, d\xi$ (C: αυθαίρετο)

Ιδιοτιμές - Ιδιοσυναρτήσεις
$Lu = \lambda u$, $\alpha < x < \beta$
Ιδιοτιμές: λ_n: $n = 1, 2, \ldots$
Ιδιοσυναρτήσεις: φ_n: $n = 1, 2, \ldots$ (ορθοκανονικές)
αναπτύσσω τη $\varphi(x)$ σε σειρά πάνω σ' αυτό το σύνολο
$u(x) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \varphi_n(x)$, $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n \varphi_n(x)$ όπου $C_n = (u(x), \varphi_n(x))$
$f_n = (\varphi_n, f) = \int_\alpha^\beta \varphi_n(x) f(x)\, dx$

αν πάω στην $Lu = f$ και αντικαταστήσω:
$$\left.\begin{aligned} L\left(\sum_{n=1}^{\infty} C_n \varphi_n\right) &= \sum_{n=1}^{\infty} f_n \varphi_n(x) \\ L\left(\sum_{n=1}^{\infty} C_n \varphi_n\right) &\overset{\text{ομ.}}{\underset{\text{συγκλ.}}{=}} \sum_{n=1}^{\infty} C_n L\varphi_n = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \lambda \varphi_n(x) \end{aligned}\right\} \Rightarrow C_n \lambda_n = f_n \Rightarrow C_n = f_n/\lambda_n$$

Επιστρέφω στο ανάπτυγμα της u:
$$u(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f_n}{\lambda_n} \varphi_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_n} \int_\alpha^\beta \varphi_n(\xi) f(\xi)\, d\xi \; \varphi_n(x)$$

$$\xrightarrow[\int \leftrightarrow \sum]{\text{εναλλάσσω}} \quad u(x) = \int_\alpha^\beta \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varphi_n(\xi)\varphi_n(x)}{\lambda_n}}_{g(x,\xi)} f(\xi)\, d\xi$$

$g(x,\xi)$: συνάρτηση Green για το συγκεκριμένο πρόβλημα.

Μάθημα 7ο Ε2. Μέθοδοι Εφαρμοσμένων Μαθηματικών ΙΙ (Αθανασιάδης) 27/11/2019

Άσκηση: Να βρεθεί η συνάρτηση Green για το πρόβλημα

$$\begin{cases} \dfrac{d^4u}{dx^4} = f(x) \quad , \; 0<x<1 \\ u(0)=u(1)=u'(0)=u'(1)=0 \end{cases}$$

Εδώ θα βρούμε 4 γραμμικά ανεξάρτητες λύσεις

γραμμικά ανεξάρτητες λύσεις: $1, x, x^2, x^3$ οπότε

$$g(x,\xi) = \begin{cases} c_1 + c_2 x + c_3 x^2 + c_4 x^3 \quad , \; x<\xi \\ d_1 + d_2 x + d_3 x^2 + d_4 x^3 \quad , \; x>\xi \end{cases}$$

Για $x=0$: $c_1=0$, $c_2=0$ (από $u(0)=u'(0)=0$)

$x=1$: $d_1+d_2+d_3+d_4=0$ και $d_2+2d_3+3d_4=0$

Συνέχεια στο $x=\xi$ για g, g', g''

Άλμα ασυνέχειας στο $x=\xi$ της $g''' = -\frac{1}{p} = -1$

Τελικά βρίσκω $g(x,\xi) = \begin{cases} \frac{1}{6}x^2(\xi-1)^2(2x\xi+x-3\xi) \quad , \; x<\xi \\ \frac{1}{6}\xi^2(x-1)^2(2x\xi+\xi-3x) \end{cases}$

Κατανομές

Συναρτήσεις δοκιμής

$\varphi: (\alpha,\beta) \to \mathbb{R}$, $\varphi \in C_0^\infty(\alpha,\beta)$ με $\operatorname{supp}\varphi \subset (\alpha,\beta)$

όπου , $\operatorname{supp}\varphi = \overline{\{x\in(\alpha,\beta) : \varphi(x)\neq 0\}}$

Παράδειγμα: $\varphi(x) = \begin{cases} e^{-\frac{x_0^2}{x_0^2-x^2}} \quad , \; |x|<x_0 \\ 0 \quad , \; |x|\geq x_0 \end{cases}$ x_0: σταθερά

Τοπικά ολοκληρώσιμες Συναρτήσεις

$f:(\alpha,\beta)\to\mathbb{R}$, f: τοπικά ολοκληρώσιμη όταν:

$\int_\gamma^\delta |f(x)|\,dx < \infty \quad , \; \forall\, [\gamma,\delta] \subset (\alpha,\beta)$

Ασθενής Παράγωγος

Έστω $u \in C^1(\alpha,\beta)$, $f:(\alpha,\beta)\to \mathbb{R}$: $u' = f$. Έστω συνάρτηση δοκιμής $\varphi \in C_0^\infty$

Τότε

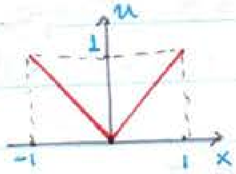
$$u'\varphi = f\varphi \Rightarrow \int_\alpha^\beta u'(x)\varphi(x)\,dx = \int_\alpha^\beta f(x)\varphi(x)\,dx \Rightarrow [u(x)\varphi(x)]_\alpha^\beta - \int_\alpha^\beta u(x)\varphi'(x)\,dx = \int_\alpha^\beta f(x)\varphi(x)\,dx$$

$$\Rightarrow -\int_\alpha^\beta u(x)\varphi'(x)\,dx = \int_\alpha^\beta f(x)\varphi(x)\,dx \quad (1)$$

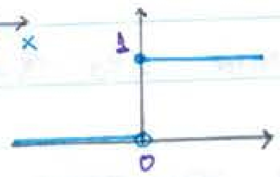
Ορισμός: Αν u, f τοπικά ολοκληρώσιμες, τότε f ασθενής παράγωγος της u αν ισχύει $-\int_\alpha^\beta u(x)\varphi'(x)\,dx = \int_\alpha^\beta f(x)\varphi(x)\,dx$ $\forall\, \varphi \in C_0^\infty(\alpha,\beta)$ συνάρτηση δοκιμής.

Παράδειγμα: $u(x) = |x|$, $x \in (-1,1)$

$u' = f : f(x) = H(x) - H(-x)$



όπου $H(x)$: Heaviside $H(x) = \begin{cases} 1, & x \geq 0 \\ 0, & x<0 \end{cases}$



Πράγματι $-\int_{-1}^1 |x|\varphi'(x)\,dx = \int_{-1}^1 (H(x) - H(-x))\varphi(x)\,dx \quad (2)$

$1^{ο}$ Μέλος $= -\int_{-1}^1 |x|\varphi'(x)\,dx = \int_{-1}^0 x\varphi'(x)\,dx - \int_0^1 x\varphi'(x)\,dx =$

$= [x\varphi(x)]\big|_{-1}^0 - \int_{-1}^0 \varphi(x)\,dx - [x\varphi(x)]\big|_0^1 + \int_0^1 \varphi(x)\,dx = -\int_1^0 \varphi(x)\,dx + \int_0^1 \varphi(x)\,dx \quad (3)$

$2^{ο}$ Μέλος $= \int_{-1}^1 (H(x) - H(-x))\varphi(x)\,dx = \int_{-1}^0 (0-1)\varphi(x)\,dx + \int_0^1 (1-0)\varphi(x)\,dx =$

$= -\int_{-1}^0 \varphi(x)\,dx + \int_0^1 \varphi(x)\,dx \quad (4)$

$(3) = (4)$

Παράδειγμα: Να βρεθεί η ασθενής παράγωγος (αν $\exists$) της

$$u(x) = H(x) = \begin{cases} 1, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}, \quad x \in (-1,1)$$

Έστω $f: u' = f$, τότε από την (1):

$-\int_{-1}^1 H(x)\varphi'(x)\,dx = \int_{-1}^1 f(x)\varphi(x)\,dx \Rightarrow -\int_{-1}^0 \cancel{H(x)}^{\,0}\varphi'(x)\,dx - \int_0^1 H(x)\varphi'(x)\,dx = \int_{-1}^1 f(x)\varphi(x)\,dx$

$\Rightarrow -\int_0^1 \varphi'(x)\,dx = \int_{-1}^1 f(x)\varphi(x)\,dx \Rightarrow -[\varphi(x)]\big|_0^1 = \int_{-1}^1 f(x)\varphi(x)\,dx$

$\Rightarrow -\cancel{\varphi(1)}^{\,0} + \varphi(0) = \int_{-1}^1 f(x)\varphi(x)\,dx \Rightarrow \boxed{\int_{-1}^1 f(x)\varphi(x)\,dx = \varphi(0)} \quad (5)$

Θα πρέπει να ισχύει $\forall\, \varphi \in C_0^\infty$

Ε2. Μέθοδοι Εφαρμοσμένων Μαθηματικών ΙΙ

27/11/2019

Αν βρω μια φ για την οποία δεν ισχύει, τότε δεν έχει ασθενή παράγωγο

Θεωρούμε τη

$$\varphi(x) = \begin{cases} e^{-\frac{\alpha^2}{\alpha^2 - x^2}} & , |x| < \alpha < 1 \\ 0 & , \text{διαφορετικά} \end{cases}$$

Τότε από την (5)

$$\varphi(0) = e^{-1} = \int_{-1}^{1} f(x) e^{-\frac{\alpha^2}{\alpha^2-x^2}} dx = \left| \int_{-\alpha}^{\alpha} f(x) e^{-\frac{\alpha^2}{\alpha^2-x^2}} dx \right| \leq \int_{-\alpha}^{\alpha} |f(x)| \left| e^{-\frac{\alpha^2}{\alpha^2-x^2}} \right| dx$$

$$\leq e^{-1} \int_{-\alpha}^{\alpha} |f(x)| dx \longrightarrow 0 \quad \text{καθώς } \alpha \to \infty \quad \text{Άτοπο } (e^{-1} \leq 0) \text{ άρα } \nexists f.$$

Κατανομές ή Γενικευμένες Συναρτήσεις

Ορισμός: Κατανομή είναι ένα συνεχές γραμμικό συναρτησοειδές $f: C_0^\infty(\alpha,\beta) \to \mathbb{R}$, $C_0^\infty(\alpha,\beta) \ni \varphi \xrightarrow{f} (f,\varphi)$

Γραμμικότητα $(f, \alpha\varphi) = \alpha (f,\varphi)$

$$(f, \varphi_1 + \varphi_2) = (f,\varphi_1) + (f,\varphi_2)$$

ακολουθία $\varphi_n \in C_0^\infty(\alpha,\beta)$, $n = 1,2,\dots$ $\quad \varphi_n \to 0 \iff \exists K$ κλειστό και φραγμένο τέτοιο ώστε να περιέχει όλους τους φορείς $\operatorname{supp}\varphi_n \subset K$, $n=1,2,\dots$ και φ_n και $\varphi_n^{(m)}$ να συγκλίνουν στο 0 μέσα στο K

δηλαδή $\varphi_n \to 0$ $\quad \varphi_n \xrightarrow{\text{ομ}} 0$ $\quad \operatorname{supp}\varphi_n \subset K$

$\varphi_n^{(m)} \xrightarrow{\text{ομ}} 0$

Αυτό το συναρτησοειδές το λέμε κατανομή

Μάθημα 8ο ΕΣ2. Μέθοδοι Εφαρμοσμένων Μαθηματικών ΙΙ (Αθανασιάδης) 4/12/2019

Κατανομές (Γενικευμένες Συναρτήσεις)

$f: C_0^\infty(\alpha,\beta)$

γραμμικό, συνεχές συναρτησοειδές.

Κανονική Κατανομή: Αν $f:(\alpha,\beta)\to\mathbb{R}$ τοπικά ολοκληρώσιμη τότε ορίζεται η κανονική κατανομή f

$$(f,\varphi)=\int_\alpha^\beta f(x)\varphi(x)\,dx \quad ,\varphi\in C_0^\infty(\alpha,\beta) \qquad (1)$$

Ιδιόμορφη κατανομή: Η κατανομή που δε μπορεί να παρασταθεί με τον (1)

π.χ. η δ_ξ (dirac) $(\delta_\xi,\varphi)=\varphi(\xi)$

Συμβολισμός: • $D(\alpha,\beta)\equiv C_0^\infty(\alpha,\beta)$

• $D'(\alpha,\beta)$: σύνολο κατανομών

Πράξεις

Ισότητα: $f_1,f_2\in D'$ $\quad f_1=f_2 \iff (f_1,\varphi)=(f_2,\varphi)\ \forall \varphi\in D$

Πρόσθεση: $f_1,f_2\in D'$ $\quad (f_1+f_2,\varphi)=(f_1,\varphi)+(f_2,\varphi)$

Πολλαπλασιασμός με βαθμωτό: $f\in D', \alpha\in\mathbb{R}$ $\quad (\alpha f,\varphi)=\alpha(f,\varphi)$

Πολλαπλασιασμός: $f\in D', h\in C^\infty$

$$(fh,\varphi)=\int_\alpha^\beta f(x)h(x)\varphi(x)\,dx=\int_\alpha^\beta f(x)\,(h(x)\varphi(x))\,dx=(f,h\varphi)$$

Αλλαγή μεταβλητής $f\in D'$, $c\in\mathbb{R}$ σταθερά

- $(f(x-c),\varphi(x))=(f(x),\varphi(x+c))$
- $(f(cx),\varphi(x))=\frac{1}{|c|}(f,\varphi(\frac{x}{c}))$, $c\neq 0$

Παράγωγος: $f\in D', \varphi\in D$ $\quad (f',\varphi)=-(f,\varphi')$, $(f^{(n)},\varphi)=(-1)^n(f,\varphi^{(n)})$

Ασκήσεις

(1) Να δειχθεί ότι $x\delta'(x) = -\delta(x)$

$$(x\delta'(x), \varphi(x)) = (\delta'(x), x\varphi(x)) = -(\delta(x), (x\varphi(x))') $$
$$= -(x\varphi(x))'|_{x=0} = -(\varphi(x)+x\varphi'(x))|_{x=0} = -\varphi(0) = -\delta(x)$$

(2) $x^2\delta''(x) = \dots$

$$(x^2\delta''(x), \varphi(x)) = (\delta''(x), x^2\varphi(x)) = +(\delta(x), (x^2\varphi(x))'') = (x^2\varphi(x))''|_{x=0} = \dots$$

(3) Να αποδειχθεί ότι $x^n\delta^{(m)}(x) = \frac{(-1)^n m!}{(m-n)!}\delta^{(m-n)}(x)$, $m,n \in \mathbb{N} : m > n$

(4) Να δικαιολογηθεί $\delta_\xi(x) = \delta(x-\xi)$

(5) Συνάρτηση Heaviside

οι $H(x) = \begin{cases} 0, & x<0 \\ 1, & x \geq 0 \end{cases}$ $H_1(x) = \begin{cases} 0, & x<0 \\ 1/2, & x=0 \\ 1, & x>0 \end{cases}$

δημιουργούν την ίδια κατανομή (για την άσκηση $x \in [-1, 1]$)

Λύσεις διαφορικής Εξίσωσης

$$Lu = f \quad (1)$$
$$Lu = u'' + p(x)u' + q(x)u \quad , p,q \in C^\infty(\alpha, \beta)$$

Μορφές λύσης

Κλασσική λύση της (1): $u \in C^2 : Lu = f$

Αν η u και f τοπικά ολοκληρώσιμες στο (α, β) τότε η (1) είναι εξίσωση με την έννοια των κατανομών και γράφεται

$$(Lu, \varphi) = (f, \varphi) \quad \forall \varphi \in D \quad (2)$$

Λύση της (1) με την έννοια των κατανομών: Όταν η u ικανοποιεί την (2)

Κλασσική λύση $\rightsquigarrow$ λύση με την έννοια των κατανομών

Το αντίστροφο δεν ισχύει.

Εξ. Μέθοδοι Εφαρμοσμένων Μαθηματικών II (Αθανασιάδης) 4/12/2019

Η θεμελιώδης λύση του L είναι λύση με την έννοια των κατανομών της $Lu = \delta(x-\xi)$

Ασθενής λύση:

$$(Lu,\varphi) = (u''+pu'+qu,\varphi) = (u'',\varphi) + (pu',\varphi) + (qu,\varphi)$$
$$= (u,\varphi'') + (u',p\varphi) + (u,q\varphi) = (u,\varphi'') - (u,(p\varphi)') + (u,q\varphi)$$
$$= (u,\underbrace{\varphi''-(p\varphi)'+q\varphi}_{L^*}) = (u,L^*\varphi)$$

$(Lu,\varphi) = (u,L^*\varphi)$ (3) L^*: Τυπικά συζυγής τελεστής του L

από (2) και (3) $\Rightarrow$ $(u,L^*\varphi) = (f,\varphi)$ (4)

Ορισμός: Ασθενής λύση του (1) είναι η u που ικανοποιεί την (4)

Παράδειγμα: $Lu = \frac{d^2}{d^2x}u(x) = e^x \quad x\in(0,1)$

μια κλασσική λύση είναι η $u(x) = x + e^x$

με την έννοια των κατανομών. $(u'',\varphi) = (e^x,\varphi)$

$u(x) = x + e^x$ είναι τοπικά ολοκληρώσιμη

$(u,\varphi) = \int_0^1 u(x)\varphi(x)\,dx$

Ασθενής λύση $(u,\varphi'') = (e^x,\varphi)$

Μάθημα 9ο Ε2. Μέθοδοι Εφαρμοσμένων Μαθηματικών ΙΙ (Αθανασιάδης) 11/12/2019

Ασκήσεις:

1) Να δειχθεί ότι $\sin(wx)\delta'(x) = -w\delta(x)$

Θα δείξω ότι

$$(\sin(wx)\delta'(x), \varphi(x)) = (-w\delta(x), \varphi(x))$$

$$(\sin(wx)\delta'(x),\varphi(x)) = (\delta'(x), \sin(wx)\varphi(x)) = -(\delta(x), \overbrace{(\sin(wx)\varphi(x))'}^{\tilde{\varphi}})$$

$$(\delta,\tilde{\varphi}) = \tilde{\varphi}(0), \quad \tilde{\varphi}\in D(\alpha,\beta) \quad , C_0^\infty(\alpha,\beta)$$

Άρα $(\sin(wx)\delta'(x),\varphi(x)) = -\left[(\sin(wx)\varphi(x))'\right]\Big|_{x=0} = -\left[w\cos(wx)\varphi(x) + \sin(wx)\varphi'(x)\right]_{x=0}$
$= -w\varphi(0) = -w(\delta,\varphi) = (-w\delta,\varphi)$

2) Να αποδειχθεί ότι $e^{kx}\delta^{(n)}(x-a) = e^{ka}\sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}(-k)^{n-j}\delta^{(j)}(x-a)$

3) Να ορίσετε άρτιες και περιττές κατανομές. Και να αποδείξετε τις ιδιότητες:

(i) Η παράγωγος μιας άρτιας είναι περιττή κατανομή

(ii) Το γινόμενο δυο περιττών κατανομών είναι άρτια.

άρτια συνάρτηση : $f(x) = f(-x)$ | $(f(x),\varphi(x)) = (f(-x),\varphi(x))$

περιττή συνάρτηση : $f(-x) = -f(x)$ | $(f,\varphi) = (-f(-x),\varphi(x))$

$$(f(-x),\varphi(x)) = (f(x),\varphi(-x)) \quad (*)$$

Έστω f περιττή $\Rightarrow$ f' άρτια

δηλαδή $f(x) = -f(-x) \Rightarrow f'(x) = f'(-x)$

Θα πρέπει να δείξω $(f'(-x),\varphi(x)) = (f'(x),\varphi(x))$

$$(f'(-x),\varphi(x)) = -(f(-x),\varphi'(x)) = -(f(x),-\varphi'(-x)) = -(f(x),\varphi'(x))$$
$$= (f'(x),\varphi(x))$$

Κατανομές στον $\mathbb{R}^n$

$\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$, Ω ανοικτό

Συναρτήσεις δοκιμής: $D(\Omega) \equiv C_0^\infty(\Omega)$
Κατανομή : συνεχές και γραμμικό συναρτησοειδές.
Κανονική κατανομή: u τοπικά ολοκληρώσιμη.
Συναρτησοειδές: $(\delta_\xi, \varphi) = \varphi(\xi)$, $\varphi \in D(\Omega)$
Παράγωγος

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x_j}, \varphi \right) = -\left(u, \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} \right)$$

$$\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}, \varphi \right) = \left(u, \frac{\partial \varphi^2}{\partial x_i x_j} \right)$$

Λύσεις Διαφορικών Εξισώσεων. $Lu = f$ (1)

1. Κλασσική λύση
2. Λύση με την έννοια των κατανομών
   $(Lu, \varphi) = (f, \varphi)$ $\varphi \in D(\Omega)$
3. Θεμελειώδης λύση του τελεστή L:
   $Lu = \delta(x-\xi)$
   $(Lu, \varphi) = \delta(x-\xi, \varphi) = \varphi(\xi)$
4. Ασθενής λύση της (1)
   Αν u, f τοπικά ολοκληρώσιμες
   $\int_\Omega u(x) L^* \varphi(x)\, dx = \int_\Omega f(x) \varphi(x)\, dx$