Μάθημα 4ο ΕΣ2. Μέθοδοι Εφαρμοσμένων Μαθηματικών ΙΙ (Αθανασιάδης) 23/10/2019

Ασκήσεις:

1) Να λυθεί η ολοκληρωτική εξίσωση

$u(x) = e^x - \int_0^x e^{x-y} u(y)\,dy$

$\mathcal{L}u = \frac{1}{s-1} - \frac{1}{s-1}\mathcal{L}u \Leftrightarrow \left(1+\frac{1}{s-1}\right)\mathcal{L}u = \frac{1}{s-1} \Rightarrow \mathcal{L}u = \frac{1}{s} \Rightarrow u(x) = 1$

$u'(x) = e^x - e^x\int_0^x e^{-y}u(y)\,dy - e^x e^{-x} u(x)$

2) 1.2/268 $\quad u(x) = x + \mu\int_0^x (x-y)\,u(y)\,dy$

$u(x) = f(x) + \sum_{j=1}^{\infty} \mu^j K^j f \quad , \quad Ku(x) = \int_0^x k(x,y)\,u(y)\,dy$

$u(x) = x + \mu K f + \mu^2 K^2 f \quad , \quad f(x) = x$

$Kf(x) = \int_0^x (x-y)\,y\,dy = \left[\frac{xy^2}{2} - \frac{y^3}{3}\right]_0^x = \frac{x^3}{2} - \frac{x^3}{3} = \frac{x^3}{6}$

$K^2 f(x) = K(Kf(x)) = K(x^3/6) = \int_0^x (x-y)\,y^3/6\,dy = \frac{1}{6}\left[\frac{xy^4}{4} - \frac{y^5}{5}\right]_0^x = \frac{1}{120}x^5$

$\Rightarrow u(x) = x + \frac{\mu}{6}x^3 + \frac{\mu}{120}x^5$

3) 1.10/269 $\quad u(x) = \sin x + 3\int_0^{\pi}(x+y)\,u(y)\,dy$

Πρέπει να βρούμε τις ιδιοτιμές του τελεστή $\quad Ku(x) = \int_0^{\pi}(x+y)\,u(y)\,dy$

$\int_0^{\pi}(x+y)\,u(y)\,dy - \underbrace{\frac{1}{3}}_{\lambda} u(x) = -\frac{1}{3}\sin(x)$

$A = \left[(\alpha_i, \beta_j)\right]_{i,j=1,2} \quad$ όπου $\quad \alpha_1(x) = x \quad \beta_1(y) = 1$

$\alpha_2(x) = 1 \quad \beta_2(y) = y$

$(\alpha_1, \beta_1) = \int_0^{\pi} x\cdot 1\,dx = \pi^2/2$

$(\alpha_1, \beta_2) = \int_0^{\pi} x\cdot x\,dx = \int_0^{\pi} x^2\,dx = \pi^3/3$

$(\alpha_2, \beta_1) = \int_0^{\pi} 1\,dx = \pi$

$(\alpha_2, \beta_2) = \int_0^{\pi} x\cdot 1\,dx = \pi^2/2 \qquad$ Άρα $A = \begin{bmatrix} \pi^2/2 & \pi^3/3 \\ \pi & \pi^2/2 \end{bmatrix}$

$$\det(A-\lambda_{1,2}I) = \begin{vmatrix} \pi^2/2 - \lambda_{1,2} & \pi^3/3 \\ \pi & \pi^2/2-\lambda_{1,2} \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow (\pi^2/2-\lambda_{1,2})^2 - \pi^4/3 = 0$$

$$\Rightarrow \frac{\pi^2}{2} - \lambda_{1,2} = \pm\frac{\pi^2}{\sqrt{3}} \Rightarrow \lambda_{1,2} = \frac{\pi^2}{2} \pm \frac{\pi^2}{\sqrt{3}}$$

Επειδη το $\lambda = \frac{1}{3}$ δεν είναι ιδιοτιμη έχω μοναδική λύση

$$u(x) = \frac{1}{1/3}\left(\frac{1}{3}\sin x + xc_1 + c_2\right)$$

4) 18/269 $\int_0^1 k(x,y)u(y)dy - \lambda u(x) = x \quad (1)$

όπου $k(x,y) = \begin{cases} x(1-y) & , 0 \le x < y \le 1 \\ y(1-x) & , 0 \le y < x \le 1 \end{cases} \quad (2)$

Πρεπει να τη μετασχηματίσουμε σε πρόβλημα συνοριακών τιμών

Απο (1) και (2) $\Rightarrow \int_0^x y(1-x)u(y)dy + \int_x^1 x(1-y)u(y)dy - \lambda u(x) = x$

$\Rightarrow (1-x)\int_0^x y u(y)dy + x\int_x^1 (1-y)u(y)dy - \lambda u(x) = x \quad (3)$

Παραγωγίζω ως προς x

$(3) \Rightarrow -\int_0^x y u(y)dy + (1-x)x u(x) + \int_x^1 (1-y)u(y) - x(1-x)u(x) - \lambda u'(x) = 1 \quad (4)$

παραγωγίζω πάλι ως προς x

$(4) \Rightarrow -x u(x) - (1-x)u(x) - \lambda u''(x) = 0 \Leftrightarrow -\lambda u''(x) - u(x) = 0$

$\Rightarrow u''(x) + \frac{1}{\lambda}u(x) = 0 \quad , \lambda \neq 0 \Rightarrow u'' + \mu u = 0, \ \mu = \frac{1}{\lambda} \quad (5)$

Για να βρούμε συνοριακές συνθήκες (χρειάζομαι 2)

στη (3) θέτω για $x=0 \Rightarrow u(0) = 0 \quad (6)$

για $x=1 \Rightarrow u(1) = 1/\lambda \quad (7)$

Η ο.ε μετασχηματίστηκε στο Π.Σ.Τ (5),(6),(7)

Θέλω να βρώ τις ιδιοτιμές και τις ιδιοσυναρτήσεις του $Ku(x) = \int_0^1 k(x,y)u(y)dy \ (8)$

Θεωρούμε την $Ku = \mu u \ (9)$ όπως προηγουμένως η (9) γράφεται

$(1-x)\int_0^x y u(y)dy + x\int_x^1 (1-y)u(y)dy = \mu u(x) \quad (10)$ (παραγωγίζω 2 φορές)

$\Rightarrow u'' + \frac{1}{\mu}u = 0$

Για $x=0 \Rightarrow u(0)=0 \quad \rightsquigarrow \quad u' + \ell u = 0 \ , u(0)=0, u(1)=0$

Για $x=1 \Rightarrow u(1)=0 \quad \rightarrow \ell_n = n^3\pi \ n=1,2,\ldots, \ u_n(x) = c_n \sin(n\pi x)$

Μάθημα 5ο: Ε2. Μέθοδοι Εφαρμοσμένων Μαθηματικών II (Αθανασιάδης) 6/11/2019

Ασκήσεις:

1.13 $u'' + \lambda u = 0 \quad , 0<x<1$

$u(0)=0 \; , \; u(1)=0$

Να μετασχηματιστεί σε ολοκληρωτική εξίσωση Fredholm

Λύση:

Ολοκληρώνουμε από 0 ως x

$u'(x) - u'(0) + \lambda \int_0^x u(y)dy = 0$

ολοκληρώνουμε πάλι

$u(x) - u(0) - u'(0)x + \lambda \int_0^x \int_0^s u(y)dy ds = 0$

$u(x) = x \cdot u'(0) - \lambda \int_0^x (x-y)\, u(y)\, dy \quad (1)$ θέτουμε $x=1$

$u(1) = u'(0) - \lambda \int_0^1 (1-y) u(y) dy \quad (2)$

$u'(0) = \lambda \int_0^1 (1-y) u(y) dy \quad (3)$ άρα από την (1) και (3)

$u(x) = \lambda x \int_0^1 (1-y) u(y)\, dy - \lambda \int_0^x (x-y) u(y)\, dy$ έπεται

$$u(x) = \lambda x \int_0^x (1-y)\, u(y)\, dy + \lambda x \int_x^1 (1-y) u(y)\, dy - \lambda x \int_0^x u(y)dy + \lambda \int_0^x y \cdot u(y) dy$$

$$u(x) = \lambda \int_0^x [x - xy - x + y]\, u(y) + \lambda \int_x^1 x(1-y)\, u(y)\, dy$$

$$u(x) = \lambda \left[\int_0^x y(1-x) u(y)\, dy + \int_x^1 x(1-y) u(y)\, dy \right] = \lambda \int_0^1 k(x,y)\, u(y)\, dy$$

όπου $k(x,y) = \begin{cases} y\,(1-x) &, y<x \\ x\,(1-y) &, x<y \end{cases}$

(1) Όμοια να γίνει για

$u'' + \lambda u = 0 \quad , 0<x<1$

$u(0)=0 \quad , u'(1)=0$

Υπόδειξη: $k(x,y) = \begin{cases} x &, x<y \\ y &, x>y \end{cases}$

(2) όμοια για

$u'' + \lambda u = 0 \qquad 0<x<1$

$u(0)=0 \qquad u(1) + u'(1) = 0$

Συναρτήσεις Green
Πρόβλημα Sturm - Liouville

Τελεστής $\quad Au \equiv -(pu')' + qu = f \quad , \alpha < x < b$
$$\left.\begin{array}{l} Au \equiv -(pu')' + qu = f, \quad \alpha < x < b \\ B_1 u(\alpha) = \alpha_1 u(\alpha) + \alpha_2 u'(\alpha) = 0 \\ B_2 u(b) = b_1 u(b) + b_2 u'(b) = 0 \end{array}\right\}$$
$$p, p', q, f \in C[\alpha, b]$$
$$|\alpha_1| + |\alpha_2| > 0 \quad , \quad |b_1| + |b_2| > 0$$

Για συντομία το παραπάνω θα γράφεται
$$Lu = f \iff \begin{pmatrix} Au = f \\ B_1 u(\alpha) = 0 \\ B_2 u(b) = 0 \end{pmatrix}$$
$$\overset{?}{\hookrightarrow} u = L^{-1}$$

Αρκεί να δούμε αν υπάρχει ο L^{-1};
Αφού ο L είναι διαφορικός τελεστής είναι λογικό ο L^{-1} να είναι ολικός τελεστής
Οπότε $\quad (L^{-1}f)(x) = \int_\alpha^b g(x,\xi) f(\xi) d\xi$
Ο πυρήνας αυτού του τελεστή $g(x,\xi)$ λέγεται συνάρτηση Green

Θεώρημα: Έστω u_1, u_2 δύο λύσεις γραμμικά ανεξάρτητες της $Au = 0$ με $B_1 u_1(\alpha) = 0$ και $B_2 u_2(b) = 0$
$W = W(u_1, u_2) = \begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ u_1' & u_2' \end{vmatrix}$ η ορίζουσα wronski

Αν το $\lambda = 0$ $(Lu = \lambda u)$ δεν είναι ιδιοτιμή του L τότε υπάρχει ο L^{-1} και $(L^{-1}f) = \int_\alpha^b g(x,\xi) f(\xi) d\xi$ όπου η $g(x,\xi)$ είναι συνάρτηση Green και δίνεται από τον τύπο
$$g(x,\xi) = \begin{cases} -\dfrac{u_1(x) u_2(\xi)}{p(\xi) w(\xi)} & , x < \xi \\[2ex] -\dfrac{u_1(\xi) u_2(x)}{p(\xi) w(\xi)} & , x > \xi \end{cases}$$

Ε2. Μέθοδοι Εφαρμοσμένων Μαθηματικών ΙΙ (Αθανασιάδης) 6/11/2019

Απόδειξη:

$$u(x) = (L^{-1}f)(x) = \int_\alpha^\beta g(x,\xi) f(\xi)\, d\xi = -\int_\alpha^x \frac{u_1(\xi)u_2(x)}{p(\xi)\, w(\xi)} f(\xi)\, d\xi - \int_x^\beta \frac{u_1(x)u_2(\xi)}{p(\xi)\, w(\xi)} f(\xi)\, d\xi$$

η οποία επαληθεύει το πρόβλημα

Ιδιότητες

(1) Η $g(x,\xi)$ είναι λύση (ως προς x) της $Au=0$

(2) Η $g(x,\xi)$ ικανοποιεί τις συνοριακές συνθήκες

(3) Η $g(x,\xi)$ είναι συνεχής

(4) Η $g(x,\xi)$ δεν παραγωγίζεται στο σημείο $x=\xi$ (ως προς x) και το άλμα ασυνέχειας είναι $g'(\xi^+,\xi) - g'(\xi^-,\xi) = -\frac{1}{p(\xi)}$

Παράδειγμα: $-u'' = f(x)$, $0<x<1$

$u(0)=0$, $u(1)=0$

$Au = -(pu')' + qu = f$

Άρα $p=1$, $q=0$

Λύσεις ομογενούς $\rightsquigarrow u''=0$ άρα $u(x) = c_1 x + c_2$

οπότε ψάχνω δύο λύσεις που ικανοποιούν τις αρχικές συνθήκες $u(0)=0$, $u(1)=0$

Θα λέγαμε λοιπόν ότι $u_1 = x$, $u_2 = 1-x$

οι όποιες είναι γραμμικά ανεξάρτητες διότι $W(u_1,u_2) = \begin{vmatrix} x & 1-x \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$

Επομένως $g(x,\xi) = \begin{cases} x(\xi-1), & x<\xi \\ \xi(1-x), & x>\xi \end{cases}$

Πιο αυστηρά θα μπορούσαμε να πάραμε

(α) $u_1(x) = c_1 x + c_2$ | $W(u_1,u_2)\neq 0$

$u_2(x) = d_1 x + d_2$ | κάθε μια να ικανοποιεί μια από τις συνθήκες

$u_1(0) = 0 \Rightarrow c_2 = 0$

$u_2(1) = 0 \Rightarrow d_1 + d_2 = 0$

(β) Από συνέχεια της g στο σημείο ξ

$g(x,\xi) = \begin{cases} c_1 x \\ d_1(x-1) \end{cases}$ στο $x=\xi$ $g(x,\xi) \Rightarrow c_1\xi = d_1(\xi-1)$

και ασυνέχεια της g' στο $x=\xi$

Άσκηση: $-u'' = f(x) \quad , \; 0<x<1$

$$u(0)=0$$

$$u'(1)=0$$