Μάθημα 3ο Ε.Ω. Μέθοδοι Εφαρμοσμένων Μαθηματικών ΙΙ (Αθανασιάδης) 16/10/2019

Ολοκληρωτικές Εξισώσεις Fredholm

(α) Με διαχωρίσιμους πυρήνες

$k(x,y)=\sum_{j=1}^{n} \alpha_j(x) b_j(y)$

$Ku-\lambda u = f$ $\lambda \neq 0$ με λύση $u(x)=\frac{1}{\lambda}\left(-f(x)+\sum_{j=1}^{n}\alpha_j c_j\right)$,

όπου $c_j=(\alpha,b_j)$ οι λύσεις του συστήματος $(A-\lambda I)\vec{c}=\vec{F}$ με $A_{ij}=(\alpha_i,b_j), F_j=(f,b_j)$

Άσκηση: Θεωρούμε τον ολοκληρωτικό τελεστή $Ku(x)=\int_0^1 (1-3xy)u(y)\,dy$

(α) Να βρεθούν οι ιδιοτιμές και οι ιδιοσυναρτήσεις του K

(β) Να μελετηθούν ως προς την επιλυσιμότητα οι ολοκληρωτικές εξισώσεις:

(i) $Ku-u=1$

(ii) $Ku-\frac{1}{2}u=f$, f συνεχής

(iii) $Ku=f$

(iv) $Ku=0$

(β) Με συμμετρικούς πυρήνες

$k(x,y)$ συμμετρικός : $k(x,y)=\overline{k(y,x)}$

Θεωρούμε την ο.ε. $Ku=\mu u$

Λήμμα: Αν $k(x,y)$ πραγματικός, συνεχής, συμμετρικός, τότε $(Ku,v)=(u,Kv)$

Απόδειξη:

$(Ku,v)=\int_\alpha^b\left(\int_\alpha^b k(x,y)u(y)dy\right)\bar{v}(x)\,dx=\int_\alpha^b\left(\int_\alpha^b k(x,y)u(x)\bar{v}(y)dx\,dy=\int_\alpha^b u(x)\overline{\left(\int_\alpha^b k(x,y)v(y)dy\right)}dx=$

$=(u,Kv)$

Θεώρημα: Για το K με πυρήνα πραγματικό, συνεχή και συμμετρικό, οι ιδιοτιμές του (αν υπάρχουν) είναι πραγματικές και σε διαφορετικές ιδιοτιμές αντιστοιχούν ορθογώνιες ιδιοσυναρτήσεις

Απόδειξη:

Έστω μ,u ιδιοτιμή - ιδιοσυνάρτηση (δηλαδή $Ku=\mu u$)

$(Ku,u)=(\mu u,u)=\mu(u,u)$, $(Ku,u)=(u,Ku)=\overline{(Ku,u)} \Rightarrow (Ku,u)\in\mathbb{R} \Rightarrow \mu\in\mathbb{R}$

μ_1, u_1 και μ_2, u_2 $\quad (K u_1 = \mu_1 u_1, \quad K u_2 = \mu_2 u_2)$

$$\mu_1 (u_1, u_2) = (\mu_1 u_1, u_2) = (K u_1, u_2) = (u_1, K u_2) = (u_1, \mu_2 u_2) = \mu_2 (u_1, u_2)$$

$$\Rightarrow (\mu_1 - \mu_2)(u_1, u_2) = 0 \overset{\mu_1 \neq \mu_2}{\Longrightarrow} (u_1, u_2) = 0$$

Επίλυση της Ο.Ε $\quad Ku - \lambda u = f \quad (1)$

Ο πυρήνας του K, $k(x,y)$ πραγματικός, συνεχής, συμμετρικός

Έστω $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n, \dots$ ιδιοσυναρτήσεις του K

$$u(x) = \sum_{k=1}^{\infty} u_k \varphi_k(x) \quad (2)$$

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k \varphi_k(x) \quad (3) \qquad \text{όπου } f_k = (f, \varphi_k) \quad k = 1, 2, \dots$$

$$(1),(2),(3): \sum_{k=1}^{\infty} u_k \overbrace{K \varphi_k(x)}^{\lambda_k \varphi_k} - \lambda \sum_{k=1}^{\infty} u_k \varphi_k(x) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k \varphi_k(x)$$

$$\Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} (\lambda_k - \lambda) u_k \varphi_k(x) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k \varphi_k(x) \longrightarrow (\lambda_k - \lambda) u_k = f_k \quad (4)$$

Αν $\lambda \neq \lambda_k$ τότε από (2),(4) $\quad \boxed{u(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{f_k}{(\lambda_k - \lambda)} \varphi_k(x)} \quad (5)$

Αν $\lambda = \lambda_m$ (ιδιοτιμή) τότε

$$u(x) = C \cdot \varphi_m(x) + \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq m}}^{\infty} \frac{f_k}{\lambda_k - \lambda} \varphi_k(x)$$

Ασκήσεις: Logan 5ο Κεφάλαιο

1.8 , 1.9 , 1.10 , 1.13 , 1.14