Μάθημα 2ο Ε2. Μέθοδοι Εφαρμοσμένων Μαθηματικών ΙΙ (Αθανασιάδης) 9/10/2019

Ολοκληρωτικές Εξισώσεις Volterra

$u = f + \lambda K u$ (1) όπου $Ku = \int_\alpha^x k(x,y)u(y)dy$ (2)

$f: [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}$ συνεχής , $k: [\alpha,\beta]\times[\alpha,\beta] \to \mathbb{R}$ συνεχής

Διαδοχικές Προσεγγίσεις

Κατασκευάζουμε την ακολουθία

$u_{n+1} = f + \lambda K u_n$, $n = 0,1,2,\dots$ (3)

Θεώρημα: Αν f, u_0, K συνεχείς συναρτήσεις τότε η ακολουθία (3) συγκλίνει ομοιόμορφα στη μοναδική λύση της (1)

Απόδειξη:

$u_1 = f + \lambda K u_0$

$u_2 = f + \lambda K u_1 = f + \lambda K(f + \lambda K u_0) = f + \lambda K f + \lambda^2 K^2 u_0$

$u_3 = f + \lambda K u_2 = \dots = f + \lambda K(f + \lambda K f + \lambda^2 K^2 u_0) = f + \lambda K f + \lambda^2 K^2 f + \lambda^3 K^3 u_0$

επαγωγικά

$$u_{n+1} = f + \sum_{j=1}^{n} \lambda^j K^j f + \lambda^{n+1} K^{n+1} u_0 \quad (4)$$

αρκεί να δείξω ότι $\lambda^{n+1} K^{n+1} u_0 \longrightarrow 0$

$|Ku_0| \le \int_\alpha^x |k(x,y)||u_0(y)|dy \le M \cdot C \cdot (x-\alpha)$

όπου $M = \max_{[\alpha,\beta]\times[\alpha,\beta]} |k(x,y)|$, $C = \max_{[\alpha,\beta]} u_0(y)$ (αφού k, u συνεχείς)

$|K^2 u_0| = \left|\int_\alpha^x K u_0(y)\, k(x,y) dy\right| \le MC(x-\alpha)^2 M/2$

επαγωγικά

$$|K^{n+1} u_0| \le \frac{C(x-\alpha)^{n+1} M^{n+1}}{(n+1)!} \le \frac{(\beta-\alpha)^{n+1} M^{n+1}}{(n+1)!} \longrightarrow 0$$

$$u(x) = f(x) + \sum_{j=1}^{\infty} \lambda^j K^j f(x) \quad (5)$$

Άσκηση (1.2 σελ 26β)

Να βρεθούν οι 3 πρώτοι μη μηδενικοί όροι της σειράς του Neumann για την επίλυση της ολοκληρωτικής εξίσωσης:

$u(x) = x + \mu \int_0^x (x-y) u(y)\, dy$

Παρατηρήσεις: Αν είναι $f=0$ η (1) γίνεται $\rightsquigarrow u = \lambda K u$, αν $\lambda = \frac{1}{\mu} \neq 0$
$Ku = \mu u$ δεν έχει λύσεις εκτός της μηδενικής (φαίνεται μέσω της σειράς Neumann)

Ολοκληρωτικές Εξισώσεις Fredholm

$Ku - \lambda u = f$ (1) όπου $Ku(x) = \int_\alpha^\beta k(x,y) u(y)\, dy$ (2)

Παραδείγματα

1) $u(x) = 1 + \int_0^1 x\, u(y)\, dy = 1 + x \overbrace{\int_0^1 u(y) dy}^{\text{αριθμός}} = 1 + c x \Rightarrow u(x) = 1 + c x$

τότε

$c = \int_0^1 (1 + cy)\, dy = \left[y + \frac{cy^2}{2} \right]_0^1 = 1 + c/2 \Rightarrow c = 1 + c/2 \Rightarrow c = 2$

οπότε $u(x) = 1 + 2x$

επαλήθευση: $1 + 2x = 1 + \int_0^1 x(1+2y)\, dy = 1 + x \cdot \left[y + y^2 \right]_0^1 = 1 + 2x$

2) $u(x) = 1 + \int_0^1 (x+y) u(y)\, dy = 1 + x \underbrace{\int_0^1 u(y) dy}_{c_1} + \underbrace{\int_0^1 y\, u(y)\, dy}_{c_2}$

τότε $u(x) = 1 + c_1 x + c_2$

$c_1 = \int_0^1 (1 + c_1 y + c_2)\, dy = \left[y + \frac{c_1}{2} y^2 + c_2 y \right]_0^1 \Rightarrow c_1 = 1 + \frac{c_1}{2} + c_2$

$c_2 = \int_0^1 y (1 + c_1 y + c_2)\, dy = \left[\frac{1}{2} y^2 + \frac{c_1}{3} y^3 + \frac{c_2}{2} y^2 \right]_0^1 \Rightarrow c_2 = \frac{1}{2} + \frac{c_1}{3} + \frac{c_2}{2}$

έχουμε λοιπόν το σύστημα

$\begin{cases} c_1 - 2c_2 = 2 \\ 2c_1 - 3c_2 = -3 \end{cases} \rightsquigarrow u(x) = 12x - 6, \quad x \in [0,1]$

Ε2. Μέθοδοι Εφαρμοσμένων Μαθηματικών ΙΙ (Αθανασιάδης) 9/10/2019

Γενικότερα: Διαχωρίσιμος Πυρήνας

$$k(x,y)=\sum_{j=1}^{m}\alpha_j(x)b_j(y) \qquad (3)$$

$$\Rightarrow \sum_{j=1}^{m}\int_\alpha^b \alpha_j(x)\cdot b_j(y)\,u(y)\,dy-\lambda u(x)=f(x)\Rightarrow\sum_{j=1}^{m}\alpha_j(x)\int_\alpha^b b_j(y)u(y)\,dy-\lambda u(x)=f(x)$$

εσωτερικό γινόμενο: $(u,v)=\int_\alpha^b u\bar{v}\,dx$

$$\Rightarrow \sum_{j=1}^{m}\alpha_j(x)\cdot\underbrace{(u,b_j)}_{c_j}-\lambda u(x)=f(x)$$

$$\sum_{j=1}^{m}\alpha_j(x)\cdot c_j-\lambda u(x)=f(x)\quad,\text{ όπου } c_j=(u,b_j) \qquad (4)$$

Πολλαπλασιάζω την (4) με $b_i \Rightarrow \sum_{j=1}^{m}(b_i,\alpha_j)c_j-\lambda c_i=f_i$, $f_i=(f,b_i)$, $i=1,\dots,m$ (5)
και έχω το σύστημα:

$$(A-\lambda I)\,C=F \qquad (6) \qquad \left(A=\left[(b_j,\alpha_i)\right]_{i,j=1,\dots,m}\right)$$

$i=1$ $\quad (b_1,\alpha_1)c_1+(b_1,\alpha_2)c_2+\dots+(b_1,\alpha_m)c_m-\lambda c_1=f_1$

$i=2$ $\quad (b_2,\alpha_1)c_1+(b_2,\alpha_2)c_2+\dots+(b_2,\alpha_m)c_m-\lambda c_2=f_2$

$\vdots$

$i=m$ $\quad (b_m,\alpha_1)c_1+(b_m,\alpha_2)c_2+\dots+(b_m,\alpha_m)c_m-\lambda c_m=f_m$

Η επίλυση της ολοκληρωτικής εξίσωσης (1) με διαχωρίσιμο πυρήνα (3) ανάγεται στην επίλυση του συστήματος (6)

Παρατηρήσεις.

1) Από την (6) αν η ορίζουσα $|A-\lambda I|\neq 0$, τότε το σύστημα (6) έχει μοναδική λύση, και η αντίστοιχη λύση της ολοκληρωτικής εξίσωσης δίνεται από τον τύπο (4) για $\lambda\neq 0$

$$u(x)=\frac{1}{\lambda}\left(-f(x)+\sum_{j=1}^{m}\alpha_j c_j\right)$$

2) Αν η ορίζουσα είναι μηδέν τότε το σύστημα μπορεί να έχει άπειρες λύσεις ή να είναι αδύνατο.

Ασκηση:

Να λυθεί η ολοκληρωτική εξίσωση

$Ku - u = 1$ όπου $Ku(x) = \int_0^1 (1-3xy)u(y)\,dy$.