Μάθημα 12ο   Ε2. Μέθοδοι Εφαρμοσμένων Μαθηματικών ΙΙ   17/12/2019

$u_t + u u_x = 0 \quad , x \in \mathbb{R} \quad t>0 \qquad\qquad \alpha(u) = f'(u) = u \quad \left(F(u) = \frac{u^2}{2}\right)$

$u(x,0) = f(x) = \begin{cases} 1 & , 0<x<1 \\ 0 & , \text{αλλιώς} \end{cases}$

με λύση

$$u(x,t) = \begin{cases} 0 , & x<0 \\ x/t , & 0<x<t \\ 1 , & t<x<1+t/2 \\ 0 , & x>1+t/2 \end{cases} \qquad 0<t\leq 2$$

και

$$u(x,t) = \begin{cases} 0 & , x<0 \\ x/t & , 0<x<\sqrt{2t} \\ 0 & , \sqrt{2t}<x \end{cases} \qquad t\geq 2$$

και παρατηρούμε ότι: $|u(x,t)| \leq \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{t}} \quad \forall x\in\mathbb{R} , \forall t>0$

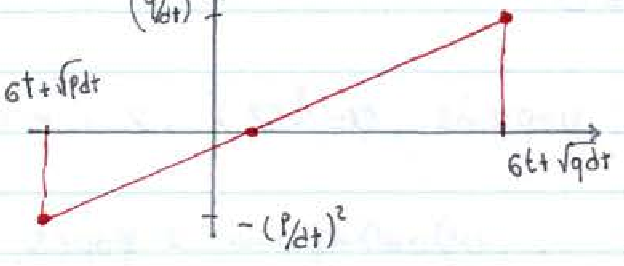
Θεώρημα: $u_t + (f(u))_x = 0 \quad , x\in\mathbb{R}, t>0 \quad , f\in C^2$, f: ομοιόμορφα κυρτή

$f(0)=0 \qquad u(x,0) = f(x) , x\in\mathbb{R}$ φραγμένη και ολοκληρώσιμη

$\Rightarrow \exists\, C>0 : |u(x,t)| \leq C/\sqrt{t} \quad , \forall x\in\mathbb{R} \quad \forall t>0$

Ορίζουμε $N(x,t) = \begin{cases} \frac{1}{d}\left(x/t - \sigma\right) & , -\sqrt{pdt} < x-\sigma t < \sqrt{qdt} \\ 0 & , \text{αλλιώς} \end{cases}$ $, p,q,d,\sigma$: σταθ.

και το ονομάζουμε "Ν-κύμα"



Θεωρούμε το συγκεκριμένο "Ν-κύμα" όπου

$p := -2\min_{y\in\mathbb{R}} \int_{-\infty}^{y} f(x)\,dx \qquad q := 2\max_{y\in\mathbb{R}} \int_{y}^{+\infty} f(x)\,dx \quad , d := f''(0) , \sigma = f'(0)$

με τις συνθήκες του προηγούμενου θεωρήματος και επιπλέον supp f : συμπαγές

$\Rightarrow \exists \quad C>0 :$

$$\int_{-\infty}^{\infty} |u(x,t) - N(x,t)|\,dx \leq C/\sqrt{t}$$

Παράδειγμα: $p=0$, $q=2$, $f(u)=u^2/2$, $6=0$, $d=1$
και υπολογίζουμε ότι:
$$\tilde{N}(x,t) = \begin{cases} x/t\,; & 0<x<\sqrt{2t} \\ 0\,, & \text{αλλιώς} \end{cases}$$

- Όταν $t \geq 2$: $u(x,t)=\tilde{N}(x,t)$
- όταν $0 \leq t \leq 2$: $\int_{-\infty}^{\infty} |u(x,t)-\tilde{N}(x,t)|\,dx = \int_0^{1+t/2} |u(x,t)-\tilde{N}(x,t)|\,dx =$

$$= \int_0^t |x/t - x/t|\,dx + \int_t^{\sqrt{2t}} |1-x/t|\,dx + \int_{\sqrt{2t}}^{1+t/2} |1-0|\,dx$$

$$\leq (1+\sqrt{2t}/t)(\sqrt{2t}-t) + (1+t/2-\sqrt{2t}) = 3-t/2-\sqrt{2t} \leq 6\sqrt{2}/t\ ,\ 0\leq t\leq 2$$

επομένως $\tilde{C} = 6\sqrt{2}$

Εξίσωση KdV (Korteweg - de Vries)

$$u_t + uu_x + \kappa u_{xxx} = 0\ ,\ \kappa>0 \text{ : σταθερά.}$$

(ρηχά νερά, διαστρωματωμένα κύματα στον ωκεανό
πλάσμα, ιοντικά - ακουστικά κύματα)

Σολιτόνιο: μια συνάρτηση της μορφής: $u(x,t)=\varphi(x+x_0-\alpha t)$, $x_0\in\mathbb{R}$
(μοναχικό κύμα) α (κυματική ταχύτητα) : σταθερή, όπου φ: θετική και άρτια
$\varphi(s)$ έχει μοναδικό μέγιστο στο $s=0$, και φθίνει έτσι ώστε
$$\lim_{|s|\to\infty}\{|\varphi(s)|+|\varphi'(s)|\}=0$$

Για την KdV ψάχνουμε λύση της μορφής, $u=f(z)$, $z:=x-ct$

Kdv $\rightarrow$ $-cf'+ff'+\kappa f'''=0$, ολοκληρώνω 2 φορές.
$$\frac{df}{dz} = \frac{1}{\sqrt{2\kappa}}\sqrt{x6\gamma+\varphi(f)}\ ,\ \text{όπου } \varphi(f):=-f^3+3cf^2+6Af+6B$$
A,B: σταθερές ολοκλήρωσης.

Τα ενδεχόμενα για τις ρίζες του $\varphi(f)$ είναι:
(i) μια απλή ρίζα και 2 μιγαδικές } προκύπτουν μη
(ii) τρεις διαφορετικές πραγματικές ρίζες $\gamma<\beta<\alpha$ } φραγμένες λύσεις.
(iii) $\gamma<\alpha=\beta$ πραγματικές.

Ε2. Μέθοδοι Εφαρμοσμένων Μαθηματικών ΙΙ

17/12/2019

(iv) $\gamma \in \mathbb{R}$, τριπλή ρίζα.

Αν $\alpha \in \mathbb{R}$ είναι ρίζα του $\varphi(f)$ τότε η $f=\alpha$ είναι σταθερή λύση της KdV. Αναζητούμε πραγματικές φραγμένες, μη σταθερές λύσεις. Τέτοιες υπάρχουν μόνο αν $\varphi(f) \geq 0$.
Μελετάμε τη περίπτωση (iii)

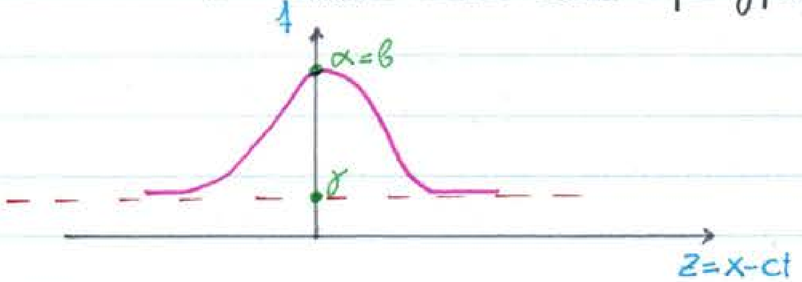
$$\frac{dz}{\sqrt{3k}} = \frac{df}{(f-\gamma)\sqrt{\alpha - f}}$$

, αντικατάσταση $f = \gamma + (\alpha-\gamma)\operatorname{sech}^2 w$
όπου $\operatorname{sech} w = \frac{1}{\cosh w} = \frac{2}{e^{w}+e^{-w}}$

οπότε $$\frac{dz}{\sqrt{3k}} = -\frac{2dw}{\sqrt{\alpha-\gamma}} \Longrightarrow w = \sqrt{\frac{\alpha-\gamma}{12k}}\, z$$

άρα $$u(x,t) = \gamma + (\alpha-\gamma)\operatorname{sech}^2\left[\sqrt{\frac{\alpha-\gamma}{12k}}\left(x - \frac{\alpha+2\gamma}{3}t\right)\right]$$, $\alpha-\gamma$: πλάτος

$\frac{\alpha+2\gamma}{3}$: φασική ταχύτητα, η ταχύτητα εξαρτάται από το πλάτος το οποίο είναι ξεκάθαρα γραμμικό χαρακτηριστικό



Παρόμοιες εξισώσεις

- $u_{tt} + (uu_x)_x + u_{xxxx} = 0$ Εξ. Boussinesq
- $iu_t + u_{xx} + f(|u|)\cdot u = 0$ Μη γραμμική εξίσωση Schröndiger
- $u_{tt} - u_{xx} + \sin u = 0$ Sine-Gordon
- $(1-u_t^2)u_{xx} + 2u_x u_t u_{xt} + (1+u_x^2)u_{tt} = 0$ Εξίσωση Born-Inreed.

Οι παραπάνω εξισώσεις επιδέχονται σολιτονικές λύσεις