Μάθημα 9ο   ΕΣ. Μέθοδοι Εφαρμοσμένων Μαθηματικών ΙΙ (Στράτης)   26/11/2019

(*) $u_t + \overbrace{(F(u))_x}^{\alpha(u)u_x} = 0 \quad , x\in\mathbb{R} \ , t>0$

S: $x = s(t)$ λεία καμπύλη επί της οποίας μια λύση της (*) είναι ασυνεχής

Έστω ότι η λύση έχει τη μορφή

$$u(x,t) = \begin{cases} u_1(x,t) & , x<s(t) \\ u_2(x,t) & , x>s(t) \end{cases}$$

$u_1(s(t),t) \neq u_2(s(t),t)$

u_1, u_2 παραγωγίσιμες σε μια περιοχή της S

(**) $u(x,0) = f(x) \quad , x\in\mathbb{R}$

Θα λέμε ότι η S "shock"

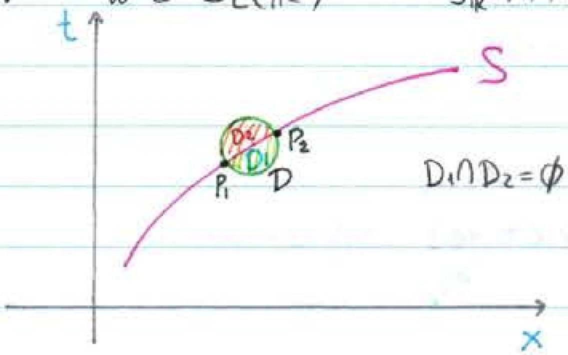
(S1) $-s'(t)[u] + [F(u)] = 0$

(S2) $F'(u_1) > s'(t) > F'(u_2)$

Η ασθενής λύση δίνεται από τον τύπο

$$\int_0^\infty\int_{\mathbb{R}} (u w_t + F(u) w_x)\,dx\,dt + \int_{\mathbb{R}} f(x) w(x,0)\,dx = 0 \qquad \forall\, w \in C^1(\mathbb{R})$$

αν $w \in C^1_c(\mathbb{R}) \rightsquigarrow \int_{\mathbb{R}} f(x) w(x,0)\,dx = 0$



$D_1 \cap D_2 = \emptyset$

D: κυκλική περιοχή με κέντρο επί της S όπου ∃ απλό άλμα ασυνέχειας.

Υπενθύμιση Θ. Green

$\iint_\Omega (U_x + V_t)\,dx\,dt = \int_{\partial\Omega} V\,dx + \int_{\partial\Omega} U\,dt$

$$0 = \iint_D (u w_t + F(u) w_x)\,dx\,dt = \underbrace{\iint_{D_1} (u w_t + F(u) w_x)\,dx\,dt}_{I_1} + \underbrace{\iint_{D_2} (u w_t + F(u) w_x)\,dx\,dt}_{I_2}$$

$$I_2 := \iint_{D_2} (u w_t + F(u) w_x)\,dx\,dt = \iint_{D_2} \left[(uw)_t + (F(u)w)_x\right] dx\,dt =$$

$V = -uw \quad , U = Fw$

$$\stackrel{\Theta.\text{Green}}{=} \int_{\partial D_2} -uw\,dx + wF(u)\,dt = \int_{P_1}^{P_2} w(-u_2\,dx + F(u_2)\,dt)$$

$u_1 = u(s^+(t),t)$

$u_2 = u(s^-(t),t)$

όμοια $I_1 := \int_{P_1}^{P_2} w(-u_1\,dx + F(u_1)\,dt)$

$$\Rightarrow \int_S w(-[u]\,dx + [F(u)]\,dt) = 0 \quad \forall\, w \in C^1_c(D)$$

$$u_t + (F(u))_x = 0 \qquad x \in \mathbb{R},\ t > 0$$
$$u(x,0) = f(x), \quad x \in \mathbb{R}$$

Αν

$\alpha(u) = F'(u) > 0$ $\qquad$ $f \in C^1(\mathbb{R})$ με ένα μόνο σημείο μεγίστου (x_0)

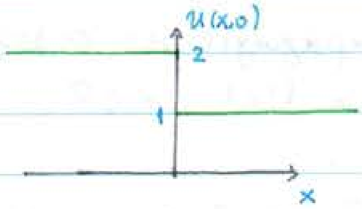
$\alpha'(u) = F''(u) \geq 0$ $\qquad$ $f = \begin{cases} \text{αύξουσα} & \text{όταν } x < x_0 \\ \text{φθίνουσα} & \text{όταν } x > x_0 \end{cases}$ $\qquad$ $\lim_{|x| \to \infty} f(x) = k$ σταθ.

$\alpha \in C^1 \Leftrightarrow F \in C^2$

Τότε έχουμε αρχή ίσων εμβαδών.

Παράδειγμα: $u_t + (e^u)_x = 0, \ x \in \mathbb{R}, \ t > 0$

$$u(x,0) = \begin{cases} 2, & x < 0 \\ 1, & x > 0 \end{cases}$$



$\alpha(u) = e^u$, $F(u) = e^u$

Οι χαρακτηριστικές που διέρχονται από τον αρνητικό x-άξονα δίνονται από τη σχέση:

$$x'(t) = e^2 \Rightarrow x(t) = e^{2t} + x_0^- \ ; \quad x_0^- : \text{σταθ.}$$

αντίστοιχα για τον θετικό

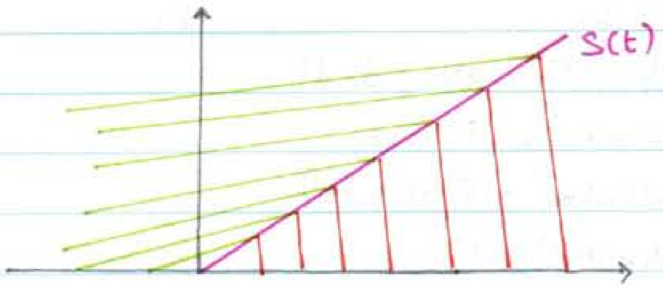
$$x'(t) = e \Rightarrow x(t) = et + x_0^+, \quad x_0^+ : \text{σταθ.}$$

Στη περιοχή $et < x < e^2 t$ οι χαρακτηριστικές τέμνονται

(S_1) $\quad [u] = 2 - 1 = 1$

$$[e^u] = e^2 - e = e(e-1)$$

$$s'(t) = e(e-1) \Rightarrow s(t) = e(e-1)t$$



Η λύση θα είναι $u(x,t) = \begin{cases} 2, & x < e(e-1)t \\ 1, & x > e(e-1)t \end{cases}$

$$e^{u_1} > s'(t) > e^{u_2}$$
$$e^2 > e(e-1) > e$$

Ε2. Μέθοδοι Εφαρμόσμενων Μαθηματικών ΙΙ (Στρατής) 26/11/2019

Παρατήρηση: $u_t + uu_x = 0$

$$u(x,0) = \begin{cases} u_1, & x<0 \\ u_2, & x>0 \end{cases} \qquad u_1 > u_2$$

Μπορώ να την γράψω

- 1ος τρόπος : $u_t + \left(\frac{1}{2}u^2\right)_x = 0 \quad \rightsquigarrow \quad F(u) = \frac{1}{2}u^2$
- 2ος τρόπος : διαιρώ με u : $(\log u)_t + u_x = 0 \quad \rightsquigarrow \quad F(u) = u$
- 3ος τρόπος: πολλαπλασιάζω με $2u$: $(u^2)_t + \left(\frac{2}{3}u^3\right)_x = 0 \quad \rightsquigarrow \quad F(u) = \frac{2}{3}u^3$

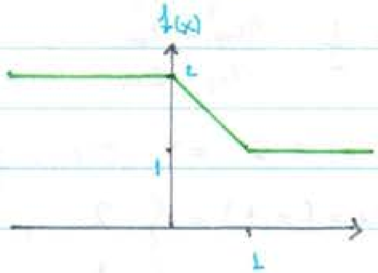
Ανάλογα με τον τρόπο η (S1) θα έχει την εξής μορφή:

- 1ος: $S'(t) = \dfrac{u_1+u_2}{2}$
- 2ος: $S'(t) = \dfrac{u_1-u_2}{\log u_1 - \log u_2}$
- 3ος: $S'(t) = \dfrac{2}{3}\,\dfrac{u_1^2 + u_1u_2 + u_2^2}{u_1+u_2}$

Για το αν θα είναι μοναδική εξαρτάται από την (S2)

Παράδειγμα: $u_t + uu_x = 0, \quad x\in\mathbb{R}, t\geq 0$

$$u(x,0) = f(x) := \begin{cases} 2, & x<0 \\ 2-x, & 0\leq x\leq 1 \\ 1, & x>1 \end{cases}$$



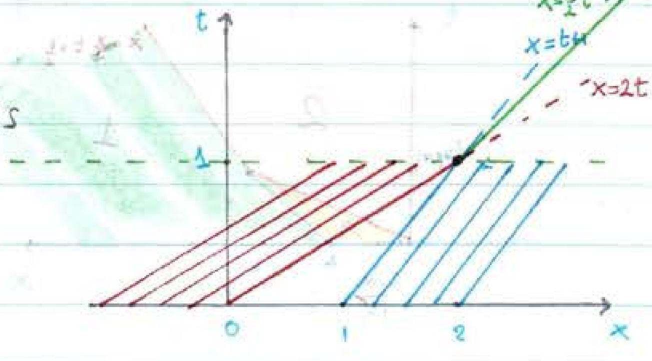
f: φθίνουσα κατά τμήματα C^1

Χαρακτηριστικές:

$x(t; t_0, x_0) = u(x_0, t_0)(t-t_0) + x_0$: ευθείες

$t=0$: $x(t; 0, x_0) = f(x_0)t + x_0$

$$X(x,t) = \begin{cases} 2t + x_0, & x_0 < 0 \\ (2-x_0)t + x_0, & x_0\in[0,1] \\ t + x_0, & x_0 > 1 \end{cases}$$



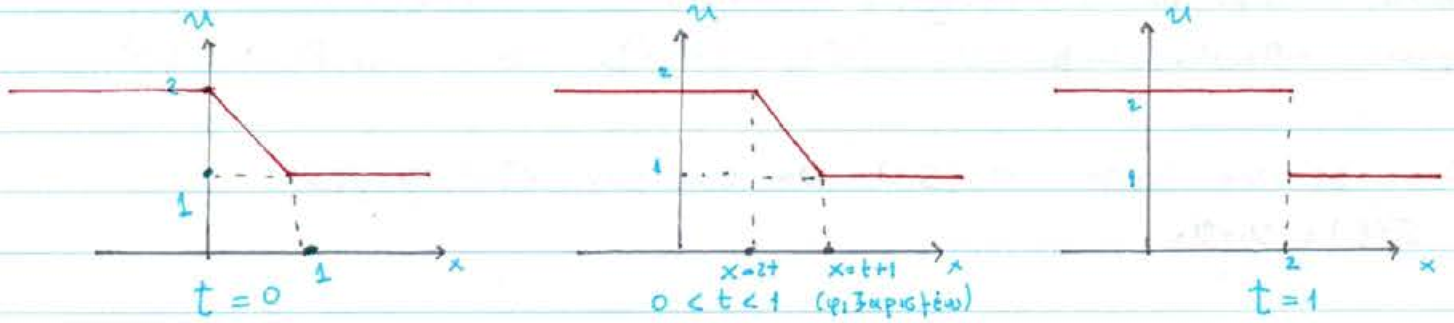
Οι "ακραίες" χαρακτηριστικές $X(t;0) = 2t$, $X(t,1) = t+1$ τέμνονται στο $(2,1) \Longrightarrow$ ο χρόνος θραύσης $t_{\theta\rho}$ είναι αυτός όπου $2t_{\theta\rho} = t_{\theta\rho}+1 \Longrightarrow t_{\theta\rho} = 1$

$$t_{op} = \inf_{x_0\in\mathbb{R}} \left[-\frac{1}{f'(x_0)\,\alpha'(f(x_0))}\right] = \inf_{x_0\in\mathbb{R}}\left[-\frac{1}{f'(x_0)}\right] = \inf_{x_0\in[0,1]}\left[-\frac{1}{f'(x_0)}\right] = 1$$

Άρα για $t < t_{op} = 1$ έχουμε λύση $u = f(x-\alpha(u)t) \Rightarrow u = 2-(x-ut)$

άρα

$$u(x,t) = \begin{cases} 2 & , \; x \le 2t \\ \frac{2-x}{1-t} & , \; 2t < x < t+1 \\ 1 & , \; x \ge t+1 \end{cases} \quad \Bigg| \; 0 \le t < 1$$



$$\lim_{t\to 1} u(x,t) = \begin{cases} 2 & , \; x<2 \\ 1 & , \; x>1 \end{cases}$$

Για να δω τι γίνεται για $t>1$

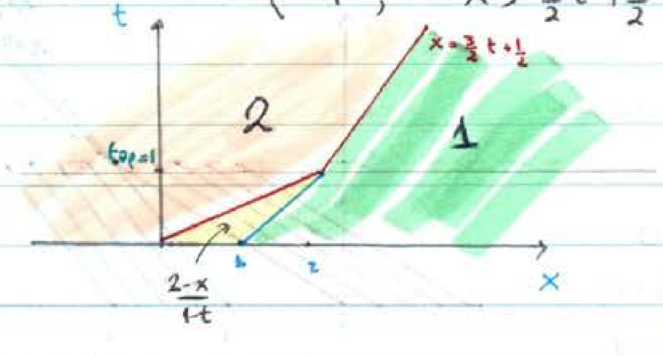
κοιτάω την σχέση άλματος

$(S1)$ $-S'(t)[u] + [F(u)] = 0 \Rightarrow -S'(t)[u] + \left[\frac{1}{2}u^2\right] = 0$ $\qquad x = S(t)$ "Shock"

$$S'(t) = \frac{1}{2}\,\frac{u_{\alpha\rho}^2 - u_{\delta\varepsilon\xi}^2}{u_{\alpha\rho} - u_{\delta\varepsilon\xi}} = \frac{1}{2}\left(u_{\alpha\rho} + u_{\delta\varepsilon\xi}\right) = \frac{1}{2}(2+1) = 3/2 \Rightarrow S(t) = \frac{3}{2}t + \underset{\text{σταθ.}}{b}$$

πρέπει $S(1) = 2 \Rightarrow S(1) = \frac{3}{2} + b = 2 \Rightarrow b = \frac{1}{2}$ άρα $x = \frac{3}{2}t + \frac{1}{2}$ "shock"

Άρα $u_{\alpha\sigma\theta}(x,t) = \begin{cases} 2 & , \; x < \frac{3}{2}t + \frac{1}{2} \\ 1 & , \; x > \frac{3}{2}t + \frac{1}{2} \end{cases} \Bigg| \; t>1$



Ε2. Μέθοδοι Εφαρμοσμένων Μαθηματικών ΙΙ (Στρατής) 26/11/2019

Ασκήσεις:

1. $u_t + u u_x = 0$

$$u(x,0) = \begin{cases} 1, & x<0 \\ 0, & x>0 \end{cases}$$

2. $u_t + u u_x = 0$

$$u(x,0) = \begin{cases} 1, & x<0 \\ -1, & 0<x<1 \\ 0, & x>1 \end{cases}$$

Μάθημα 10ο Ε2. Μέθοδοι Εφαρμοσμένων Μαθηματικών ΙΙ (Στράτης) 3/12/2019

$$\begin{cases} u_t + \overbrace{\gamma\left(1-\frac{2}{b}u\right)}^{\alpha(u)} u_x = 0, & x\in\mathbb{R},\ t>0,\ b>0 \quad \gamma: \text{σταθ} > 0 \\ u(x,0) = \begin{cases} \alpha, & x<0 \\ b, & x\geq 0 \end{cases} & 0<\alpha<b \end{cases}$$

$F'(u) = \alpha(u)$

· Χαρακτηριστικές για $x_0 \geq 0$: $x = \alpha(b)t + x_0 \Rightarrow x = -\gamma t + x_0$ ευθείες κλίσης $-\frac{1}{\gamma}<0$

· Χαρακτηριστικές για $x_0<0$: $x = \alpha(\alpha)t + x_0 =$

$\Rightarrow x = \gamma\left(1-2\frac{\alpha}{b}\right)t + x_0$ κλίση $\frac{1}{\gamma(1-\frac{2\alpha}{b})}$ $\begin{cases} <0, & \text{αν } \frac{b}{2}<\alpha<b \\ >0, & \text{αν } 0<\alpha<\frac{b}{2} \end{cases}$

αλλά ισχύει: $-\frac{1}{\gamma} < \frac{1}{\gamma\left(1-2\frac{\alpha}{b}\right)} < \frac{1}{\gamma}$

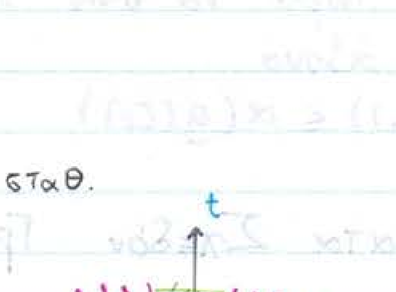
Εισαγωγή shock: $S'(t) = \frac{[F(u)]}{[u]} = \frac{F(b)-F(\alpha)}{b-\alpha} = \frac{0-\gamma\left(\alpha-\frac{\alpha}{b}\right)^2}{b-\alpha} = -\gamma\frac{\alpha}{b}$

$$\begin{cases} S(t) = -\gamma\frac{\alpha}{b}t + c \\ S(0)=0 \end{cases} \Rightarrow S(t) = -\gamma\frac{\alpha}{b}t \Rightarrow u(x,t) = \begin{cases} \alpha, & x<-\gamma\frac{\alpha}{b}t \\ b, & x\geq -\gamma\frac{\alpha}{b}t \end{cases}$$

Μοναδικότητα: $F'(u_{ap}) > S'(t) > F'(u_{\delta\varepsilon\xi})$

(Συνθήκη Εντροπίας) $u_{ap} = \alpha$, $u_{\delta\varepsilon\xi} = b$.

$$\begin{cases} u_t + \gamma\left(1-\frac{2}{b}u\right)u_x = 0, & x\in\mathbb{R},\ t>0,\ b>0,\ \gamma>0: \text{σταθ.} \\ u(x,0) = \begin{cases} b, & x\leq 0 \\ 0, & x>0 \end{cases} \end{cases}$$



Χαρακτηριστικές για $x_0>0$: $x = \alpha(u(x_0,0))t + x_0$

$= \alpha(0)t + x_0 = \gamma t + x_0$

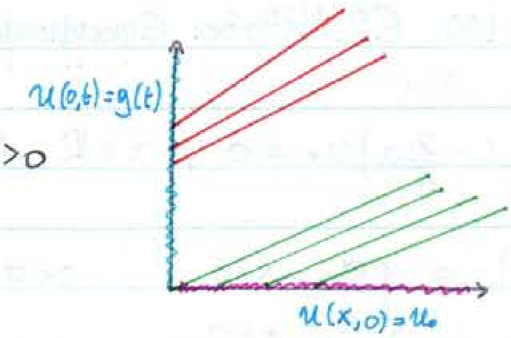
Χαρακτηριστικές για $x_0 \leq 0$: $x = -\gamma t + x_0$

$$u(x,t) = \begin{cases} b, & x\leq -\gamma t \\ \frac{1}{2}b\left(1-\frac{1}{\gamma}\frac{x}{t}\right), & -\gamma t<x<\gamma t \\ 0, & x\geq \gamma t \end{cases}$$

Πρόβλημα του σήματος (ΠΑΣΤ)

$$\begin{cases} u_t + \alpha(u) u_x = 0 \ , \ x>0, t>0 \ , \ \alpha' > 0 \ , \ \alpha(u_0) > 0 \\ u(x,0) = u_0 \ , \ x \geq 0 \quad u_0 : \text{σταθ} \\ u(0,t) = g(t) \ , \quad t \geq 0 \end{cases}$$

σήμα



Η ιδέα είναι να καθαρίσουμε το g για να μην έχουμε shock
Θέλω διαισθητικά να αποφύγω να τέμνονται οι παράλληλες ή να ανοίγουν

Χαρακτηριστικές για τον x-άξονα.
$x(t) = \alpha(u_0) t + c$ Θεωρώ τη χαρακτηριστική που τέμνει τον t-άξονα στο $(0,\tau)$

$$\left.\begin{array}{l} x(t) = \alpha(c) t + \tilde{c} = \alpha(g(\tau)) t + \tilde{c} \\ t = \tau \ : \quad 0 = \alpha(g(\tau)) c + \tilde{c} \end{array}\right\} \quad x(t) = \alpha(g(c))(t-c)$$

Για να μην τέμνονται οι χαρακτηριστικές θα πρέπει $\alpha(g(c)) \leq \alpha(u_0)$

$\alpha' > 0 \implies g(t) \leq u_0 \quad \forall c \geq 0$

Αυτή η συνθήκη μου εξασφαλίζει ότι οι χαρακτηριστικές του x-άξονα με εκείνες του t-άξονα

Θέλω τώρα να μην τέμνονται μεταξύ τους οι χαρακτηριστικές του t-άξονα

$\alpha(g(\tau_1)) \leq \alpha(g(\tau_2)) \quad , \ \tau_1 \geq \tau_2 \implies g$ φθίνουσα $\implies g(\tau_1) \leq g(\tau_2) \ , \ \tau_1 \geq \tau_2$

Συστήματα Σχεδόν Γραμμικών Εξισώσεων

$A \vec{u}_x + B \vec{u}_t = \vec{c} \quad (\Sigma) \quad x, \in \mathbb{R}$

$A, B \in \mathbb{R}^{N\times N} \ , \ \vec{c}, \in \mathbb{R}^N \quad \vec{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_N \end{pmatrix}$

$\alpha_{ij} = \alpha_{ij}(x, t, u_1, \dots, u_N) \qquad u_j = u_j(x,t)$

$b_{ij} = b_{ij}(x, t, u_1, \dots, u_N)$

$c_i = c_i(x, t, u_1, \dots, u_N)$

Ορίζω $F(\lambda) = \det(A - \lambda B)$ χαρακτηριστικό πολυώνυμο $\deg F = N$.

$F(\lambda) = 0$ χαρακτηριστική εξίσωση λ_j ρίζες.

ΕΩ. Μέθοδοι Εφαρμοσμένων Μαθηματικών ΙΙ (Στράτης) 3/12/2019

λ_j ρίζες του $F(\lambda)$	(Σ)
$\lambda_j \in \mathbb{R}$ $\lambda_i \neq \lambda_j$ $\forall i,j = 1,2,\dots,N$ $\lambda_j \in \mathbb{R}$ και η εξίσωση $(A-\lambda B)\vec{u} = \vec{0}$ να έχει N γραμμικά ανεξάρτητες λύσεις.	Υπερβολικό
$\lambda_j \in \mathbb{C}$	Ελλειπτικό
$\lambda_j \in \mathbb{R}$ και η εξίσωση $(A-\lambda B)\vec{u} = \vec{0}$ Δεν έχει N γραμμικά ανεξάρτητες λύσεις	Παραβολικό

$\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_N \in \mathbb{R}$ ρίζες της $F(\lambda) = 0$

$(X_j)\ \dfrac{dx}{dt} = \lambda_j \quad , j = 1, \dots, N$

Οι καμπύλες του xt-επιπέδου που ικανοποιούν τις (X_j) λέγονται χαρακτηριστικές καμπύλες του (Σ)

(Υπερβολικό)

$$\text{ΠΑΤ} \begin{cases} A\vec{u}_x + B\vec{u}_t = \vec{0} & (\Sigma) \\ \vec{u}(x,0) = \vec{f}(x) & , x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

$F(\lambda) = \det(A - \lambda B)$, $\deg F = N$

$F(\lambda) = 0 \quad \dfrac{dx}{dt} = \lambda_j$

"Ομογενές Υπερβολικό με σταθερούς συντελεστές"

"Αποσύζευξη" της μορφής $\quad -\lambda_j \dfrac{\partial z_j}{\partial x} + \dfrac{\partial z_j}{\partial t} \quad , j = 1, \dots, N$

z_j κατάλληλοι συνδυασμοί

Βήματα

(1) Βρίσκω το $F(\lambda) = \det(A - \lambda B)$

(2) Υπολογίζω $\lambda_1, \dots, \lambda_N \in \mathbb{R}$ ρίζες του $F(\lambda)$

(3) Φτιάχνω $P_{N \times N}$: $\det P \neq 0$ ως εξής $A^{tr}\vec{p}_j = \lambda_j B^{tr}\vec{p}_j$, $\vec{p}_j \neq \vec{0}$ ($\vec{p}_j$: j-γραμμή)

(4) $Q = PB$

(5) $\vec{g}(x) = Q\,\vec{f}(x)$

(6) Τα z_j τα βρίσκω : $z_j(x,t) = g_j(x - \lambda_j t)$ (λύσεις του συστήματος *)

$$* \begin{cases} \lambda z_x + z_t = 0 \\ z(x,0) = g(x) \quad \forall j \end{cases}$$

(7) $Q\vec{u} = \vec{z}$