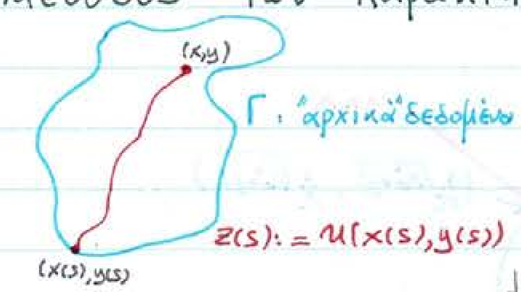
Μάθημα 3ο: Ε2. Μέθοδοι Εφαρμοσμένων Μαθηματικών ΙΙ (Στρατής) 15/10/2019

$\alpha, b, c, d \in C^1$, $|\alpha|^2 + |b|^2 \neq 0$

$\alpha(x,y)\, u_x + b(x,y)\, u_y + c(x,y)\, u = d(x,y)$

Μέθοδος των χαρακτηριστικών



$$\frac{dx}{ds} = \alpha(x(s), y(s))$$

$$\frac{dy}{ds} = b(x(s), y(s))$$

"Κλειστό" (δηλαδή ανεξάρτητο του z)

$$\frac{dz}{ds} = \frac{du(x(s),y(s))}{ds} = u_x \frac{dx}{ds} + u_y \frac{dy}{ds} = \alpha u_x + b u_y = d(x(s),y(s)) - c(x(s),y(s))\, z(s)$$

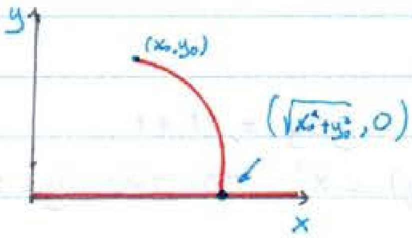
$$\boxed{\begin{array}{l} \boxed{\begin{array}{l} \dot{x} = \alpha(x,y) \\ \dot{y} = b(x,y) \end{array}} \\ \dot{z} = d(x,y) - c(x,y)\, z \end{array}}$$

Δεδομένο $(x_0, y_0) \in U$ | Τέμνει για κάποιο s η

Αρχικές τιμές: $x(0) = x_0$, $y(0) = y_0$ | λύση $(x(s), y(s))$ την Γ;

Παράδειγμα:

$$\begin{cases} x \cdot y\, u_x - x^2 u_y - y u = x \cdot y, & x > 0,\ y > 0 \\ u(x,0) = f(x), & x > 0 \end{cases}$$



Γράφω το χαρακτηριστικό σύστημα

$$\left.\begin{array}{lll} dx/ds = xy, & x(0) = x_0 \\ dy/ds = -x^2, & y(0) = y_0 \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{ds}\frac{ds}{dx} = -x^2 \frac{1}{xy} = -\frac{x}{y}, \quad y(x_0) = y_0$$

$$dz/ds = y(x+z), \quad z(0) = u(x_0, y_0) \Rightarrow \frac{dz}{dx} = \frac{dz}{ds}\frac{ds}{dx} = y(x+z)\frac{1}{xy} = 1 + \frac{1}{x} z, \quad z(x_0) = u(x_0, y_0)$$

$$\Rightarrow y\, dy = -x\, dx \Rightarrow \frac{y^2}{2} = -\frac{x^2}{2} + k, \quad y(x_0) = y_0 \Longrightarrow x^2 + y^2 = x_0^2 + y_0^2$$

$$\Rightarrow \frac{dz}{dx} - \frac{1}{x} z = 1 : \quad z(x) = x \ln(x) + x \ln c \qquad (c > 0 : \text{σταθερά})$$

Ξέρω ότι $u(x_0, y_0) = z(x_0) = x_0 \ln x_0 + x_0 \ln c \Rightarrow \ln c = \frac{1}{x_0}\left(u(x_0, y_0) - x_0 \ln x_0\right)$

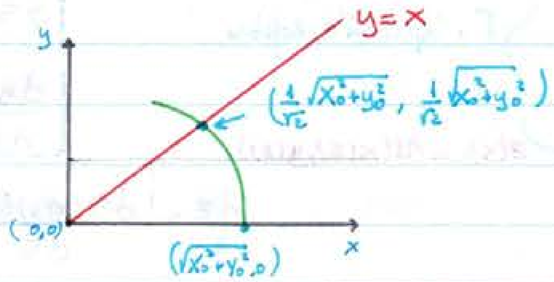
$$\Rightarrow z(x) = x \ln(x) + x\, \frac{u(x_0, y_0) - x_0 \ln(x_0)}{x_0} \qquad (*)$$

$$z(x) = u(x, y(x)) \Rightarrow$$

$$z\left(\sqrt{x_0^2+y_0^2}\right) = u\left(\sqrt{x_0^2+y_0^2}, 0\right) = f\left(\sqrt{x_0^2+y_0^2}\right) \overset{(*)}{\Longrightarrow} f\left(\sqrt{x_0^2+y_0^2}\right) = \sqrt{x_0^2+y_0^2}\cdot \ln\left(\sqrt{x_0^2+y_0^2}\right) + \sqrt{x_0^2+y_0^2}\cdot \frac{u(x_0,y_0) - x_0 \ln x_0}{x_0}$$

Επομένως η λύση είναι γενικά

$$u(x_0,y_0) = x_0\left[\ln x_0 - \ln\left(\sqrt{x_0^2+y_0^2}\right)\right] + \frac{x_0}{\sqrt{x_0^2+y_0^2}}\, f\left(\sqrt{x_0^2+y_0^2}\right)$$



Παράδειγμα:

$$\begin{cases} xy\, u_x - x^2 u_y - yu = xy & , y > x > 0 \\ u(x,x) = x & , x > 0 \end{cases}$$

$$z(x) = x \ln x + \frac{x}{x_0}\left(z(x_0) - x_0 \ln x_0\right) \quad : x = x_0$$

$$\Rightarrow z\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{x_0^2+y_0^2}\right) = u\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{x_0^2+y_0^2}, \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{x_0^2+y_0^2}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{x_0^2+y_0^2}$$

Ασκήσεις

(1) $x u_x + y u_y = u + 1$

$u(x,y) = x^2$ επί της $y = x^2$

(2) $x u_x - y u_y + u = x \quad , y > x^2$

$u(x, x^2) = x$

(3) $(x+2) u_x + 2y u_y = 2u \quad , x > -1, y > 0$

$u(-1, y) = \sqrt{y}$

Παράδειγμα:

$$x u_x + 2x^2 u_y - u = x^2 e^x$$

Αρχικά δεδομένα ανά περίπτωση

(1) $u(x,y) = \cos x$, επί της $\Gamma: y = x^2 + 4x$

(2) $u(x,y) = xe^x - x$ επί της $\tilde{\Gamma}: y = x^2 + 4$

(3) $u(x,y) = \sin x$, επί της $\tilde{\Gamma}: y = x^2 + 4$

Ε2. Μέθοδοι Εφαρμοσμένων Μαθηματικών ΙΙ (Στρατής) 15/10/2019

$\frac{dy}{dx} = \frac{2x^2}{x} = 2x$ (χαρακτηριστική εξίσωση)

$\Rightarrow y = x^2 + k$, k: σταθερά (χαρακτηριστικές καμπύλες) οικογένεια παραβολών

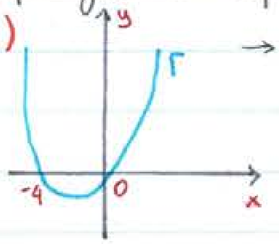
$\xi = x$, $\eta = y - x^2$ } Νέες μεταβλητές

$\Rightarrow \tilde{u}_\xi - \frac{1}{\xi}\tilde{u} = \xi e^\xi$ $\quad \tilde{u}(\xi,\eta) = \xi e^\xi + \xi g(\eta)$, g αυθαίρετη C^1 συνάρτηση

$\hookrightarrow u(x,y) = x e^x + x g(y - x^2)$, g αυθαίρετη C^1

Τώρα για τα αρχικά μας δεδομένα

(1)



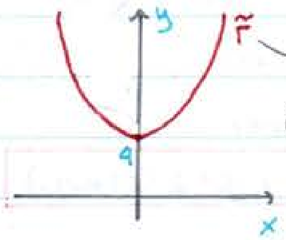
$\rightarrow$ Δεν είναι χαρακτηριστική καμπύλη $\Longrightarrow$ Μοναδική λύση

Επί της Γ: $u(x,y) = u(x, x^2+4x) = xe^x + xg(4x) = \cos x$

$g(4x) = \frac{\cos x - xe^x}{x}$, $x \neq 0 \Rightarrow g(x) = \frac{4}{x}\left(\cos\frac{x}{4} - \frac{x}{4}e^{x/4}\right)$

άρα η λύση είναι $u(x,y) = xe^x + \frac{4x}{y-x^2}\left[\cos\frac{y-x^2}{4} - \frac{1}{4}(y-x^2)\, e^{\frac{y-x^2}{4}}\right]$

(2)



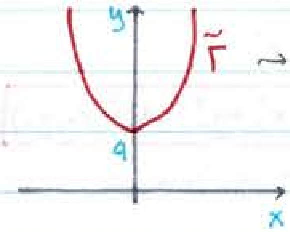
$\rightarrow$ Χαρακτηριστική καμπύλη

Επί της $\tilde{\Gamma}$: $u(x,y) = u(x, x^2+4) = xe^x + xg(4) = xe^x - x$

$\Rightarrow g(4) = -1$, $g \in C^1$ $\exists$ άπειρες τέτοιες g

$\Rightarrow$ Το πρόβλημα έχει άπειρες λύσεις.

(3)



$\rightarrow$ Χαρακτηριστική καμπύλη

Επί της $\tilde{\Gamma}$: $u(x,y) = u(x, x^2+4) = xe^x + xg(4) = \sin x$

$\Rightarrow \nexists$ λύση

Σχεδόν Γραμμικές

$a(x,y,u)\,u_x + b(x,y,u)\,u_y = c(x,y,u)$ $\qquad U \subseteq \mathbb{R}^2$ $\qquad z(s) := u(x(s), y(s))$

χαρακτηριστικές εξισώσεις

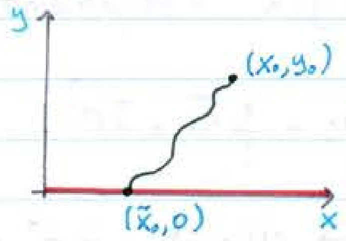
$\frac{dx}{ds} = a(x(s), y(s), z(s))$

$$\frac{dy}{ds} = b(x(s), y(s), z(s))$$ Δεν είναι "κλειστό" σύστημα

$$\frac{dz}{ds} = \frac{d\,u(x(s),y(s))}{ds} = u_x \frac{dx}{ds} + u_y \frac{dy}{ds} = a u_x + b u_y = c$$

$$\Rightarrow \frac{dz}{ds} = c(x(s), y(s), z(s))$$

Παράδειγμα:



$$\begin{cases} (y+2xu)u_x - (x+2yu)u_y = \frac{1}{2}(x^2-y^2), & x \in \mathbb{R}, y>0 \\ u(x,0) = x, & x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

(1) $\frac{dx}{ds} = y + 2xz$, $x(0)=x_0$

(2) $\frac{dy}{ds} = -(x+2yz)$, $y(0)=y_0$

(3) $\frac{dz}{ds} = \frac{1}{2}(x^2-y^2)$, $z(0)=u(x_0,y_0)$

Παίρνω τις (1) και την πολλαπλασιάζω με y και την (2) με x

$\Rightarrow y\cdot x' + x y' = y^2 - x^2$ $\qquad x(s)y(s) = -2z(s) + c_1$

$\quad (xy)' = y^2 - x^2 \overset{(3)}{=} -2z'$ $\qquad x_0 y_0 = -2u(x_0,y_0) + c_1$

$$\Rightarrow \boxed{x(s)y(s) + 2z(s) = x_0y_0 + 2u(x_0,y_0)}$$

Παίρνω τώρα τις (1) επί x και (2) επί y

$\Rightarrow \left(\frac{1}{2}(x^2+y^2)\right)' = xx' + yy' = 2z(x^2-y^2)$ $\Rightarrow x^2+y^2 = 4z^2 + c_2$

$\quad \overset{(3)}{=} 4zz' = (2z^2)'$ $\qquad x_0^2 + y_0^2 = 4u(x_0,y_0) + c_2$

$$\Rightarrow \boxed{x^2(s) + y^2(s) = 4z^2(s) + x_0^2 + y_0^2 - 4u^2(x_0,y_0)}$$

$y=0$: $\tilde{x}^2 = 4\tilde{x}^2 + x_0^2 + y_0^2 - 4u^2(x_0,y_0) \Rightarrow 3\tilde{x} + x_0^2 + y_0^2 - 4u^2(x_0,y_0) = 0$

$y=0$: $2\tilde{x} = 2u(x_0,y_0) + x_0y_0$

Έτσι

$$u^2(x_0,y_0) - 3x_0y_0\,u(x_0,y_0) - \left(x_0^2 + y_0^2 + \frac{3}{4}x_0^2y_0^2\right) = 0 \quad \forall (x,y): x\in\mathbb{R}, y>0$$ πεπλεγμένη μορφή.

$$u_\pm(x_0,y_0) = \frac{3}{2}x_0y_0 \pm \sqrt{3x_0^2y_0^2 + x_0^2 + y_0^2}$$ $\cdot\, u(x,0) = x$

$$u(x,y) = \begin{cases} u_+(x,y), & x \geq 0, y>0 \\ u_-(x,y), & x<0, y>0 \end{cases}$$ $u(0^+,y) = y \neq -y = u(0^-,y)$ όχι συνεχής για $y>0$