Μάθημα 1ο   ΕΩ. Μέθοδοι Εφαρμοσμένων Μαθηματικών ΙΙ (Στράτης)   1/10/2019

$u = u(x_1, x_2, \dots, x_n)$ $\Delta u := \sum_{j=1}^{n} u_{x_j x_j}$

$v = v(x_1, x_2, \dots, x_n, t)$ $\Delta v := \sum_{j=1}^{n} v_{x_j x_j}$

Γραμμικές ΜΔΕ

$\Delta u = 0$ εξίσωση Laplace (ελλειπτική)

$\Delta u + k^2 u = 0$ εξίσωση Helmholtz $(-\Delta u = \lambda u)$

$\Delta u = f$ εξίσωση Poisson

$v_t - \Delta v = 0$ εξίσωση διάχυσης ή θερμότητας (παραβολική)

$i v_t + \Delta v = 0$ γραμμική εξίσωση Schrödinger

$v_{tt} - \Delta v = 0$ κυματική εξίσωση (υπερβολική)

$(v_{tt} - c^2 \Delta v = 0)$

Μη γραμμικές ΜΔΕ

$|\text{grad}\, u| = 1$ εξίσωση εικόνας $(n = 2 : u_{x_1}^2 + u_{x_2}^2 = 0)$

$\begin{cases} v_t + v v_x = 0 & \text{εξίσωση Burgers} \\ v_t + \alpha(v) v_x = 0 & v_t + (F(v))_x = 0 \end{cases}$

$\text{div}\left(\dfrac{\text{grad}\, u}{\sqrt{1 + |\text{grad} u|^2}} \right) = 0$ εξίσωση ελάχιστης επιφάνειας

$v_t + v v_x + v_{xxx} = 0$ $(n=1)$ (Korteweg - de Vries KdV)

$v_t - \Delta v = f(v)$ αντίδρασης - διάχυσης RD

$i v_t + \Delta v = f(|v|) v$ μη γραμμική Schrödinger NLS

π.χ. $f(|v|) = |v|^2$

Συστήματα

$v_{tt} - \mu \Delta v - (\lambda + \mu)\, \text{grad}(\text{div}\, v) = 0$ εξίσωση γραμμικής ελαστικότητας (Navier)

$v_t + \text{div} F(v) = 0$ σύστημα νόμων διατήρησης

$v_t - \Delta v = f(v)$ σύστημα RD

$\begin{cases} \text{Curl}\, E = -\partial B / \partial t & \vec{x} \in \mathbb{R}^3 \\ \text{Curl}\, B = \varepsilon_0 \mu_0\, \partial E / \partial t & \text{εξισώσεις Maxwell} \\ \text{div}\, B = \text{div}\, E = 0 & \end{cases}$

$$\begin{cases} v_t + v \cdot \text{grad}\, v = -\text{grad}\, p \\ \text{div} = 0 \end{cases}$$ εξίσωση Euler για ασυμπίεστο ρευστό χωρίς ιξώδες

$$\begin{cases} v_t + v\,\text{grad}\, v - \Delta v = -\text{grad}\, p \\ \text{div} = 0 \end{cases}$$ Navier-Stokes για ασυμπίεστο ρευστό με ιξώδες

$\mathbb{R}^n \quad \alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{N}_0^n$: πολυδείκτης

$|\alpha| = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j$

$$D^\alpha u = \frac{\partial^{|\alpha|} u}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} \dots \partial x_n^{\alpha_n}} = \partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} \dots \partial x_n^{\alpha_n} u$$

$k \in \mathbb{N}_0 : D^k u = \{ D^\alpha u : |\alpha| = k \}$

$u = u(x_1, \dots, x_n) \quad , \vec{x} = (x_1, \dots, x_n)$

ΜΔΕ κ-τάξης

$F(\vec{x}, u, Du, D^2 u, \dots, D^k u) = 0.$

- Γραμμική $\sum_{|\alpha| \le k} A_\alpha(\vec{x}) D^\alpha u = \underbrace{f(\vec{x})}_{\text{γνωστή}}$, αν $f = 0$: ομογενής

- Ημι-Γραμμική (Semilinear)
  $\sum_{|\alpha| = k} A_\alpha(\vec{x}) D^\alpha u + A_0(\vec{x}, u, Du, \dots, D^{k-1} u) = 0$
  Π.χ. $u_t + u_x + u^2 = 0$

- Σχεδόν Γραμμική (Οιονεί Γραμμική) Quasilinear
  $\sum_{|\alpha| = k} A_\alpha(\vec{x}, u, Du, \dots, D^{k-1} u) D^\alpha u + A_0(\vec{x}, u, Du, \dots, D^{k-1} u) = 0$
  Π.χ: $u_t + u u_x = 0$

- Πλήρως Μη Γραμμική
  Π.χ. $u_{x_1}^2 + u_{x_2}^2 = 0$

Κύμα: Διαταραχή σ' ένα μέσο που διαδίδεται με την πάροδο του χρόνου και μεταφέρει ενέργεια (όχι αναγκαστικά ύλη)

Ε2. Μέθοδοι Εφαρμοσμένων Μαθηματικών ΙΙ (Στρατής) 1/10/2019

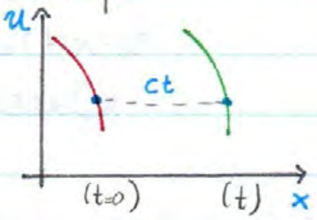
Απλούστερη μορφή μαθηματικού κύματος

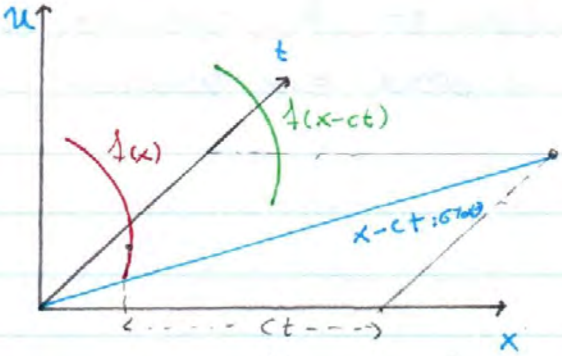
$u(x,t) = f(x-ct)$, $c > 0$ σταθερό ($u(x,t) = f(x+ct)$)

πυκνότητα

Αρχικό κυματικό "προφίλ"

$u(x,0) = f(x)$





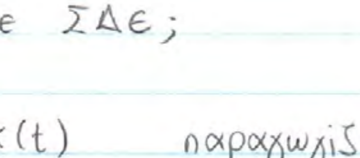
Οδεύον κύμα (travelling wave) κινούνται χωρίς παραμόρφωση επί των ευθειών $x+ct$: σταθ , $x-ct$ σταθ.
(χαρακτηριστικό των γραμμικών κυμάτων)

Λύση κυματικού μετώπου

$u(x,t) = f(x \pm ct)$ τέτοια ώστε $u(-\infty,t) = C_-$ σταθερό

$u(+\infty,t) = C_+$ σταθερό

αν $C_- = C_+$



παλμός

(*) $u_t + c \cdot u_x = 0$, c: σταθερό 1-dim κυματική εξίσωση

υπάρχουν καμπύλες στο xt - επίπεδο επί των οποίων η (*) να ανάγεται σε ΣΔΕ;

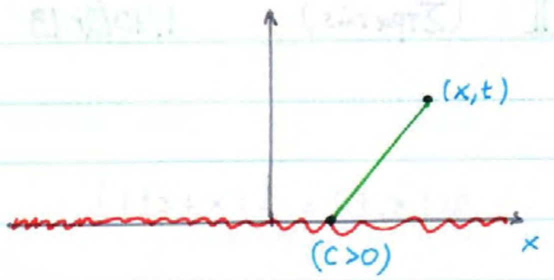
Έστω ΝΑΙ

$C: x = x(t)$ παραγωγίζω επί της C

$$\frac{du}{dt} = \frac{\partial u}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial u}{\partial t} = u_t + \underbrace{\frac{dx}{dt}}_{=c} \cdot u_x + c u_x = 0$$

Αν $\frac{dx}{dt} = c$ επί της C τότε $\frac{du}{dt} = 0$

$x = ct + x_0$, x_0: αυθαίρετη σταθερά



$$(\#)\begin{cases} u_t + c\,u_x = 0 & , x\in\mathbb{R}\ ,\ t>0 \\ u(x,0) = f(x) & , x\in\mathbb{R}\ ,\ f \text{ γνωστή} \end{cases}$$

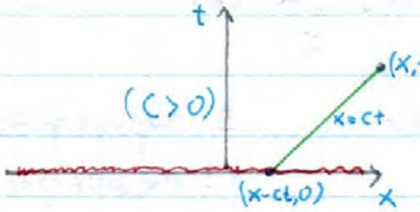
$$u(x,t) = u(x-ct,0) = f(x-ct)$$

κλασσική λύση

Θεώρημα: Αν η f είναι συνεχώς παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, τότε το ΠΑΤ $(\#)$ έχει κλασσική λύση $u(x,t) = f(x-ct)$ η οποία είναι μοναδική.

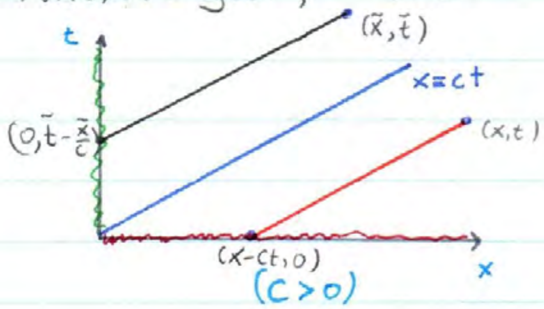
Μάθημα 2ο Ε2 Μέθοδοι Εφαρμοσμένων Μαθηματικών ΙΙ (Στρατής) 8/10/2019

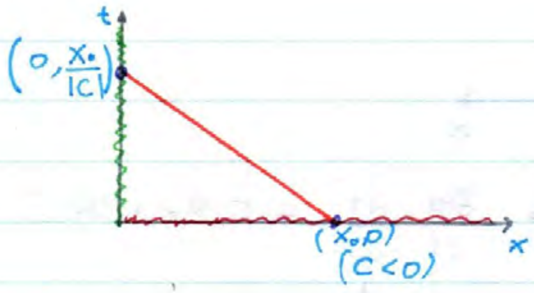
ΠΑΤ
$$\begin{cases} u_t + C u_x = 0, & x\in\mathbb{R},\ t>0 \quad C: \text{σταθ} \\ u(x,0) = f(x), & x \in \mathbb{R} \end{cases}$$



$u(x,t) = f(x-ct)$

ΠΑΣΤ
$$\begin{cases} u_t + C u_x = 0, & x>0,\ t>0 \quad C: \text{σταθ} \\ u(x,0) = f(x), & x>0 \quad (f(0)=g(0)) \\ u(0,t) = g(t), & t>0 \end{cases}$$





$$C>0: u(x,t) = \begin{cases} f(x-ct), & x>ct \\ g(t-\frac{x}{c}), & x<ct \end{cases}$$

$u(ct,t) = f(0) = g(0)$

γιατι

$x>ct: \quad u(x,t) = u(x-ct,0) = f(x-ct)$

$x<ct: \quad u(x,t) = u(0,t-\frac{x}{c}) = g(t-\frac{x}{c})$

$$\underset{f(x_0)}{u(x_0,0)} = \underset{g(\frac{x_0}{|c|})}{u(0,\frac{x_0}{|c|})}$$

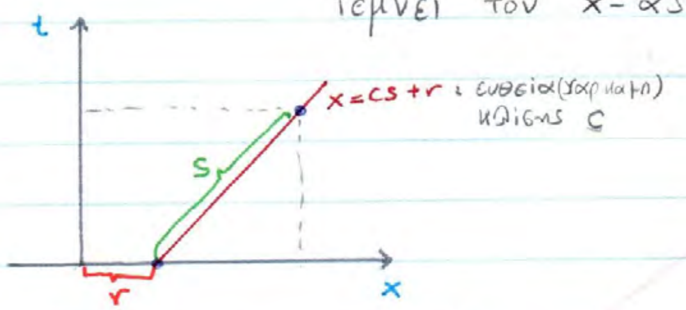
Μη καλώς τοποθετημένο (απαιτείται να ισχύει η συνθήκη συμβιβαστότητας)

Ασκήσεις.

- $3u_x + u_t = 0, \quad x>0,\ t>0$
  $u(x,0) = 0, \quad x>0$
  $u(0,t) = \begin{cases} t, & 0<t<1 \\ 1, & t\geq 1 \end{cases}$
- $3u_x + u_t = 5, \quad x\in\mathbb{R},\ t>0$
  $u(x,0) = e^x, \quad x\in\mathbb{R}$ (Υπόδειξη: $u(x,t) = w(x,t)+5$)
- $4u_x + u_t = u, \quad x\in\mathbb{R},\ t>0$
  $u(x,0) = \cos x, \quad x\in\mathbb{R}$ (Υπόδειξη: $u(x,t) = e^t \cdot w(x,t)$)

$u_t + C u_x = 0 \quad (*) \longrightarrow \frac{dx}{dt} = C$: ευθείες (χαρ. καμπ.)
επί των οποίων η λύση είναι σταθερές

$x = C \cdot s + r$ S: παράμετρος που καθορίζει τη θέση πάνω στη χαρακτηριστική
$t = s$ r: παράμετρος που καθορίζει το σημείο που η χαρακτηριστική τέμνει τον x-άξονα



$$\frac{du}{ds} = \frac{\partial u}{\partial x}\underbrace{\frac{dx}{ds}}_{C} + \frac{\partial u}{\partial t}\underbrace{\frac{dt}{ds}}_{1} = C \cdot u_x + u_t \overset{(*)}{=} 0$$

Θεωρώ το Π.Α.Τ

$$\begin{cases} \alpha(x,t,u)u_x + b(x,t,u)u_t = c(x,t,u) \\ u(x,0) = f(x) \end{cases}$$

εισάγουμε τη καμπύλη C: $x = x(s)$, $x(0) = r$
$t = t(s)$, $t(0) = 0$

περιορισμός της $u(x,t)$ επί της C: $u(x(s),t(s))$: $\boxed{\frac{du}{ds} = c}$ (3)

παραγωγίζω ως προς S:

$$\frac{du}{ds} = \frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{dx}{ds} + \frac{\partial u}{\partial t}\frac{dt}{ds} = \alpha \cdot u_x + b u_t = c$$

Απαιτούμε $\boxed{\frac{dx}{ds} = \alpha}$ (1) και $\boxed{\frac{dt}{ds} = b}$ (2)

καταλήγω σε ένα σύστημα 3 Σ.Δ.Ε.

(1), (2), (3) : χαρακτηριστικές εξισώσεις
συνήθως "γράφεται" $\frac{dx}{\alpha} = \frac{dt}{b} = \frac{du}{c}$

αν $c = 0$, εννοούμε ότι $du = 0$ επί της C

Ε2. Μέθοδοι Εφαρμοσμένων Μαθηματικών ΙΙ (Στράτης) 8/10/2019

Παρατήρηση: Ας υποθέσουμε ότι έχουμε γραμμική
$\alpha(x,t)u_x + b(x,t)u_t = c(x,t)u + d(x,t)$
δεν μπορώ να έχω την ολική ύπαρξη λύσης όπως μπορώ να πώ για τις συνήθεις γιατί τα συστήματα δεν είναι κατ' ανάγκη γραμμικά.

Γραμμικές ΜΔΕ $1^{ης}$ τάξης

$\alpha, b, c, d \in C^1(U)$ $|\alpha|^2+|b|^2 \neq 0$ στο U

$\alpha(x,y)u_x + b(x,y)u_y + c(x,y)u = d(x,y)$, $x,y \in U \subset \mathbb{R}^2$ ανοιχτό, συνεκτικό

1 Αλλαγή Συντεταγμένων

$\frac{dx}{ds} = \alpha(x,y)$

$\frac{dy}{dx} = \frac{b(x,y)}{\alpha(x,y)} \Rightarrow \boxed{\xi(x,y) = c^* : \text{σταθ}}$ οικογ. καμπυλών

πρώτη νέα συντεταγμένη

$\frac{dy}{ds} = b(x,y)$

$\boxed{\eta(x,y) = c^*}$ · κατάλληλη επιλογή

δεύτερη νέα συντεταγμένη

Θέλουμε να εκφράσουμε τις x,y μέσω ξ και η

$x = x(\xi,\eta)$

$y = y(\xi,\eta)$

$\begin{vmatrix} \xi_x & \xi_y \\ \eta_x & \eta_y \end{vmatrix} \neq 0$ $\quad u(x,y) = u(x(\xi,\eta), y(\xi,\eta)) =: \tilde{u}(\xi,\eta)$

(την η την επιλέγω με την πιο απλή μορφή έτσι ώστε να ικανοποιεί)

$u_x = \tilde{u}_\xi \xi_x + \tilde{u}_\eta \eta_x$

$u_y = \tilde{u}_\xi \xi_y + \tilde{u}_\eta \eta_y$

έτσι η αρχική μΔΕ γράφεται

$(\alpha\xi_x + b\xi_y)\tilde{u}_\xi + (\alpha\eta_x + b\eta_y)\tilde{u}_\eta + c\tilde{u} = \tilde{d}$

Κάθε $(x,y) \in U$ βρίσκεται πάνω σε μια "καμπύλη στάθμης" της ξ

$\Sigma_{c^*} := \{(x,y)\in U : \xi(x,y) = c^*\}$

Πάνω στην Σ_{c^*} η y μπορεί να θεωρηθεί ως συνάρτηση του x
$y = y(x)$.

Πάνω στην Σ_{c^*} έχουμε:
$$0 = \frac{d}{dx}\left(\xi(x,y(x))\right) = \xi_x + \xi_y\frac{dy}{dx} = \xi_x + \frac{b}{a}\xi_y \rightsquigarrow a\xi_x + b\xi_y = 0$$

Επομένως η αρχική γράφεται $(a\eta_x + b\eta_y)\tilde{u}_\eta + c\tilde{u} = \tilde{d}$
που είναι συνήθης.

Παράδειγμα: $\underbrace{x\,y}_{a}u_x + \underbrace{x^2}_{b}u_y - \underbrace{y}_{c}u = x\underbrace{y}_{d}$ $\quad (x,y)\in U \equiv \mathbb{R}^2$

$$\left.\begin{aligned}\frac{dx}{ds} &= xy\\ \frac{dy}{ds} &= x^2\end{aligned}\right\} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{x}{y} \Rightarrow y\,dy = x\,dx \Rightarrow \xi(x,y): \frac{1}{2}(x^2-y^2) = c^*$$

$\rightsquigarrow (xy\eta_x + x^2\eta_y)\tilde{u}_\eta - y\tilde{u} = xy$ $\qquad \begin{vmatrix} x & -y \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = y \neq 0$

"Αυθαίρετη" επιλογή της η: $\underbrace{\eta(x,y) = x}_{(*)}$ $\qquad U_1 = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : y>0\}$.

Τελικά έχουμε
$$xy\tilde{u}_\eta - y\tilde{u} = xy \Rightarrow x\tilde{u}_\eta - \tilde{u} = x \xrightarrow{(*)} \boxed{\eta\tilde{u}_\eta - \tilde{u} = \eta}$$
ΣΔΕ γραμμική 1ης τάξης

αυθαίρετη σταθερά ολοκλήρωσης ως προς η

$\tilde{u}(\xi,\eta) = \underbrace{f(\xi)}_{f\in C^1 \text{: αυθαίρετη}}\cdot\eta + \eta\ln|y|$

Πάω να βρω τώρα την $u(x,y)$
$u(x,y) = f\left(\frac{1}{2}(x^2-y^2)\right)x + x\ln|x|$ στο U_1

- Αν επιλέξω για $\eta(x,y) = \frac{1}{2}(x^2+y^2)$ $\qquad \begin{vmatrix} x & -y \\ x & y \end{vmatrix} = 2xy \neq 0$

  $x = \sqrt{\xi+\eta}$

  $y = \sqrt{\eta-\xi}$ $\qquad U_2 = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x>0 \ \& \ y>0\}$

Ε2 Μέθοδοι Εφαρμοσμένων Μαθηματικών ΙΙ (Στρατής) 8/10/2019

$\tilde{u}_\eta - \frac{1}{2(\xi+\eta)}\tilde{u} = \frac{1}{2\sqrt{\xi+\eta}} \rightsquigarrow \tilde{u}(\xi,\eta) = g(\xi)\sqrt{\xi+\eta} + \sqrt{\xi+\eta}\,\ln\sqrt{\xi+\eta}$

$\longrightarrow u(x,y) = |x|\,g\left(\frac{x^2-y^2}{2}\right) + |x|\ln|x|$ g αυθαίρετη C^1

Άσκηση:
$$\begin{cases} u_t + t^2 u_x = 4u, & x>0,\ t>0 \\ u(x,0) = 0, & x \geq 0 \\ u(0,t) = f(t), & t \geq 0, \quad f(0) = 0 \end{cases}$$

Υπόδειξη: $\xi(x,t) = t^3 - 3x$ $\quad \tilde{u}_\eta = 4\tilde{u}$ $\quad u(0,t) = f(t)$

$\eta(x,t) = t$ $\quad u(x,t) = e^{4t}F(t^3-3x)$

$$\rightsquigarrow u(x,t) = \begin{cases} e^{4(t-\sqrt[3]{t^3-x})}\cdot f(\sqrt[3]{t^3-x}), & 0 \leq x \leq t^3/3 \\ 0, & x \geq t^3/3 \end{cases}$$