Μάθημα 6ο   Ε14. Διακριτά Δυναμικά Συστήματα   29/10/2019

$y_{k+n} + \alpha_1 y_{k+n-1} + \dots + \alpha_n y_k = R_k = 0$

Ειδική λύση με μέθοδο απροσδιόριστων συντελεστών
$R_k \in \{\alpha^k, \cos\theta_k, \sin\theta_k, k^\ell\}$ ή αθροίσματα όρων της παραπάνω μορφής

Ορισμός: Η οικογένεια του R_k, $[R_k] = \{f_1(k), \dots, f_n(k)\}$ τέτοιες ώστε κάθε
$E^\ell(R_k) = R_{k+\ell} \in \langle f_1(k), \dots, f_m(k) \rangle$

Παράδειγμα:
- $R_k = \alpha^k \Rightarrow R_{k+\ell} = \alpha^{k+\ell} = \alpha^\ell \cdot \alpha^k \Rightarrow [\alpha^k] = \{\alpha^k\}$
- $R_k = \cos(\theta_k) \Rightarrow R_{k+\ell} = \cos((k+\ell)\theta) = \cos(\ell\theta)\cos(k\theta) - \sin(\ell\theta)\sin(k\theta)$
  $\Rightarrow [\cos(k\theta)] = \{\cos(k\theta), \sin(k\theta)\}$
- $R_k = k^p \Rightarrow R_{k+\ell} = (k+\ell)^p = k^p + p\ell k^{p-1} + \dots + \ell^p$
  $\Rightarrow [k^p] = \{1, k, \dots, k^p\}$

Ιδιότητα: $[R_k^1 R_k^2] = [R_k^1] \times [R_k^2]$
$[R_k^1 + R_k^2] = [R_k^1] \cup [R_k^2]$

Παράδειγμα:
(i) $[R_k] = [\alpha^k \cos(\theta k)] = [\alpha^k] \times [\cos(\theta_k)] = \{\alpha^k\} \times \{\cos(\theta_k), \sin(\theta_k)\}$
$= \{\alpha^k \cos(\theta k), \alpha^k \sin(\theta k)\}$
(ii) $[R_k] = [k^p \sin(\theta k)] = [k^p] \times [\sin(\theta_k)] = \{1, k, \dots, k^p\} \times \{\cos(\theta_k), \sin(\theta k)\}$
$= \{\cos(\theta k), \sin(\theta k), \dots, k^p \cos(\theta_k), k^p \sin(\theta k)\}$

Αρχή Υπέρθεσης: Έστω $L(y_k) = R_k^1 + R_k^2$ και έστω
$L(\psi_k^1) = R_k^1$ και $L(\psi_k^2) = R_k^2 \Rightarrow L(\psi_k^1 + \psi_k^2) = R_k^1 + R_k^2$

Βήματα για εύρεση ειδικής λύσης της $L(y_k) = R_k$
B1: Γενική λύση της $L(y_k) = 0$, έστω $L_{o\mu}$
B2: Βρίσκουμε $[R_k] = \{f_1(k), \dots, f_m(k)\}$

B3: Αν $f_i(\kappa) \notin L_{o\mu}$ $\forall\, i=1,2,\dots,m$ τότε ορίζαμε $\psi_\kappa = \sum_{i=1}^{m} A_i F_i(\kappa)$
Με αντικατάσταση στην $L(y_\kappa) = R_\kappa$ υπολογίζουμε τα A_i

B4: Αν $f_i \in L_{o\mu}$ για κάποιο $i \in m$, τότε ορίζουμε τον ελάχιστο $s \in N$:
$\kappa^s [R_\kappa] \cap L_{o\mu} = \emptyset$
Οπότε ψάχναμε λύση $\psi_\kappa = \sum_{i=1}^{m} A_i \kappa^s f_i(\kappa)$ και υπολογίζουμε τα A_i
με αντικατάσταση.

Παραδείγματα

(1) $y_{\kappa+2} - 5y_{\kappa+1} + 6y_\kappa = 2 + 4\kappa$

B1: Χαρακτηριστικό πολυώνυμο $r^2 - 5r + 6 = 0 \iff (r-2)(r-3) = 0$
οπότε $y_\kappa = C_1 2^\kappa + C_2 3^\kappa$, $C_i \in R$ $\quad L_{o\mu} = \langle 2^\kappa, 3^\kappa \rangle$

B2: Ειδική λύση της $L(y_\kappa) = 2$ $\quad [2] = \{1\}$ οπότε
$\psi_\kappa^1 = A \Rightarrow 2A = 2 \Rightarrow A = 1 \Rightarrow \psi_\kappa^1 = 1$

B3: $[R_\kappa^2] = \{1, \kappa\} \Rightarrow \psi_\kappa^2 = A + B\kappa$
$\psi_{\kappa+1}^2 = A + B + B\kappa$
$\psi_{\kappa+2}^2 = A + 2B + B\kappa \Rightarrow A + B(\kappa+2) - 5[A + B(\kappa+1)] + 6[A + B\kappa] \equiv 4\kappa$
$\Rightarrow (2A - 3B) + \kappa \cdot 2B = 4\kappa$
Άρα $B = 2$, $A = 3$ $\quad \psi_\kappa^2 = 3 + 2\kappa$

B4: $y_\kappa = C_1 2^\kappa + C_2 3^\kappa + 4 + 2\kappa$

(2) $y_{\kappa+3} - 7y_{\kappa+2} + 16y_{\kappa+1} - 12y_\kappa = \kappa \cdot 2^\kappa$

B1: $p(r) = r^3 - 7r^2 + 16r - 12 = (r-2)^2(r-3)$
Η γενική λύση της $L(y_\kappa) = 0$: $y_\kappa = C_1 2^\kappa + C_2 \kappa 2^\kappa + C_3 3^\kappa$
Άρα $L_{o\mu} = \langle 2^\kappa, \kappa \cdot 2^\kappa, 3^\kappa \rangle$

B2: $[R_\kappa] = [\kappa 2^\kappa] = \{2^\kappa, \kappa 2^\kappa\}$

$$\left.\begin{array}{l} 2^\kappa \in L_{o\mu} \\ \kappa \cdot 2^\kappa \in L_{o\mu} \end{array}\right\} \Rightarrow [R_\kappa] \longrightarrow \kappa^2 [R_\kappa] = \{\kappa^2 2^\kappa, \kappa^3 2^\kappa\}$$

Η υποψήφια λύση είναι της μορφής:
$\psi_\kappa = A\kappa^2 2^\kappa + B\kappa^3 2^\kappa$
μετά από πράξεις προκύπτει ότι
$A = -\frac{1}{8}$, $B = -\frac{1}{24}$

Ε14. Διακριτά Δυναμικά Συστήματα

29/10/2019

3) $L(y_k) = k \sin\left(\frac{\pi k}{4}\right)$ με $p(r) = (r^2-2r+2)^2(r-3) = [(r-1)^2+1^2]^2(r-3)=0$

$\Rightarrow r = 1 \pm i$ και $r=3$

οπότε $\sqrt{2}\cdot e^{\pm i\frac{\pi}{4}}$

$L_{o\mu} = \langle (\sqrt{2})^k \cos\left(\frac{k\pi}{4}\right), (\sqrt{2})^k \sin\left(\frac{k\pi}{4}\right), (\sqrt{2})^k k\cos\left(\frac{k\pi}{4}\right), (\sqrt{2})^k k \sin\left(\frac{k\pi}{4}\right), 3^k \rangle$

$[(\sqrt{2})^k \sin\left(\frac{\pi k}{4}\right)] = \{(\sqrt{2})^k \cos\left(\frac{\pi k}{4}\right), (\sqrt{2})^k \sin\left(\frac{\pi k}{4}\right)\}$

παρατηρούμε ότι είναι λύση της ομογενούς οπότε ανεβάζουμε τάξη

$\xrightarrow[k^6]{6=2} \{(\sqrt{2})^k k^2 \cos\left(\frac{k\pi}{4}\right), (\sqrt{2})^k k^2 \sin\left(\frac{k\pi}{4}\right)\}$

οπότε $\psi_k = (\sqrt{2})^k \cdot k^2 \left(A\cos\left(\frac{k\pi}{4}\right) + B\sin\left(\frac{k\pi}{4}\right)\right)$

Γενικά θα μπορούσα $A\cos(\theta k) + B\sin(\theta k) = C\cos(k\theta+\varphi)$
$= C(\cos(k\theta)\cos(\varphi) - \sin(k\theta)\sin(\varphi))$

Μέθοδος μεταβολής παραμέτρων

$L(y_k) = y_{k+n} + \alpha_1 y_{k+n-1} + \dots + \alpha_n y_k = R_k \quad (\alpha_n \neq 0)$

Έστω ότι $\{y_k\}_{i=1}^{n}$ θεμελιώδες σύνολο λύσεων

Επομένως

$\sum_{i=1}^{n} c_i y_k^{(i)}$ η γενική λύση της $L(y_k)=0$

Επιζητούμε λύση $y_k = \sum_{i=1}^{n} c_i(k) y_k^{(i)}$

$y_{k+1} = \sum_{i=1}^{n} c_i(k+1) y_{k+1}^{(i)} = \sum_{i=1}^{n} c_i(k) y_{k+1}^{(i)} + \underbrace{\sum_{i=1}^{n} \Delta c_i(k) y_{k+1}^{(i)}}_{\text{Το επιλέγω } = 0}$

$y_{k+2} = \sum_{i=1}^{n} c_i(k+1) y_{k+2}^{(i)} = \sum_{i=1}^{n} c_i(k) y_{k+2}^{(i)} + \sum_{i=1}^{n} \Delta c_i(k) y_{k+2}^{(i)}$

$\vdots$

$y_{k+n} = \dots = \sum_{i=1}^{n} c_i(k) y_{k+n}^{(i)} + \underbrace{\sum_{i=1}^{n} \Delta c_i(k) y_{k+n}^{(i)}}_{= R_k}$

Τότε y_k λύση $L(y_k) = R_k$:

$y_{k+n} + \alpha_1 y_{k+n-1} + \dots + \alpha_n y_k = \left(R_k + \sum_{i=1}^{n} c_i(k) y_{n+k}\right) + \dots + \alpha_n\left(\sum_{i=1}^{n} c_i(k) y_k^{(i)}\right)$

$= R_k + \sum_{i=1}^{n} c_i(k)\left(y_{k+n}^{(i)} + \dots + \alpha_n y_k^{(i)}\right) = R_k$

$$\underset{A}{\begin{bmatrix} y_{k+1}^{(1)} & \dots & y_{k+1}^{(n)} \\ \vdots & & \vdots \\ y_{k+n}^{(1)} & \dots & y_{k+n}^{(n)} \end{bmatrix}} \underset{\underline{x}}{\begin{bmatrix} \Delta c_1(k) \\ \vdots \\ \Delta c_n(k) \end{bmatrix}} = \underset{\underline{b}}{\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ R_k \end{bmatrix}}$$

$$\Delta c_i(k) = \frac{f_i(k)}{C(k+1)} \quad C(k+1) \sim \text{Casorati} \qquad c_i(k) = \cancel{d_i}^{\,0} + \sum_{r=0}^{k-1} \frac{f_i(r)}{C(r+1)} \quad (i=1,2,\dots,n)$$

Παράδειγμα

$$y_{k+2} - 3y_{k+1} + 2y_k = 4^k \sim p(r) = r^2 - 3r + 2 = (r-1)(r-2)$$

$$y_k = c_1 2^k + c_2 \sim y_k = c_1(k) 2^k + c_2(k)$$

$$y_{k+1} = c_1(k+1) 2^{k+1} + c_2(k+1) = \dots = c_1(k) 2^{k+1} + c_2(k) + \Delta c_1(k) 2^{k+1} + \Delta c_2(k)$$

$$y_{k+2} = \dots = c_1(k)^{k+2} + c_2(k) + \Delta c_1(k) 2^{k+2} + \Delta c_2(k)$$

οπότε

$$\underset{A}{\begin{bmatrix} 2^{k+1} & 1 \\ 2^{k+2} & 1 \end{bmatrix}} \underset{\underline{x}}{\begin{bmatrix} \Delta c_1(k) \\ \Delta c_2(k) \end{bmatrix}} = \underset{\underline{b}}{\begin{bmatrix} 0 \\ 4^k \end{bmatrix}} \qquad |A| = -2^{k+1}$$

$$\Delta c_1(k) = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 4^k & 1 \end{vmatrix} \Big/ -2^{k+1} = \frac{4^k}{2^{k+1}} = 2^{k-1} \quad \text{οπότε}$$

$$c_1(k) = d_1 + \sum_{r=0}^{k-1} 2^{r-1} = d_1 + \frac{1}{2}(1 + \dots + 2^{k-1}) = \dots = d_1 + \frac{1}{2}\left(\frac{1-2^k}{1-2}\right) = \cancel{\left(d_1 - \frac{1}{2}\right)}^{\,0} + 2^{k-1}$$

$$\Delta c_2(k) = \begin{vmatrix} 2^{k+1} & 0 \\ 2^{k+2} & 4^k \end{vmatrix} \Big/ -2^{k+1} = -4^k \sim c_2(k) = \dots = \cancel{\left(d_2 + \frac{1}{3}\right)} - \frac{1}{3} 4^k$$

οπότε η λύση

$$y_k = c_1 2^k + c_2 + 2^{k-1} \cdot 2^k - \frac{1}{3} 4^k$$

Μάθημα 7ο Ε14. Διακριτά Δυναμικά Συστήματα 30/10/2019

Μετασχηματισμός z

Έστω (y_k), $\mathbb{N}_0 \to \mathbb{R}$, $z \in \mathbb{C}$, τότε $\mathcal{Z}(y_k) = \hat{y}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} y_k z^{-k} = y_0 + y_1 z^{-1} + y_2 z^{-2} + \dots$

Το $\hat{y}(z)$ είναι καλά ορισμένο αν η σειρά συγκλίνει για κάποια $z \in \mathbb{C}$ και το σύνολο των $z \in \mathbb{C}$ για τους οποίους συγκλίνει η σειρά λέγεται Περιοχή Σύγκλισης.

Πρόταση: Έστω ότι $\lim_{k\to\infty} \left|\frac{y_{k+1}}{y_k}\right| = R$, τότε η Π.Σ. του $\hat{y}(z)$ περιέχει $\{z : |z| > R\}$

Απόδειξη:

Από το κριτήριο του λόγου

$$\lim_{k\to\infty} \left|\frac{y_{k+1} z^{-(k+1)}}{y_k z^{-k}}\right| < 1 \Leftarrow \frac{1}{|z|} \lim_{k\to\infty} \left|\frac{y_{k+1}}{y_k}\right| < 1 \Leftarrow \frac{R}{|z|} < 1 \Leftarrow |z| > R$$

Η Π.Σ περιέχει το $\{z : |z| > R\}$

Ορισμός: Η ακολουθία (y_k), $\mathbb{N}_0 \to \mathbb{R}$ είναι εκθετικά φραγμένη αν $\exists\, M > 0, \alpha > 0$ τέτοιοι ώστε $|y_k| \le M \alpha^k \ \forall\, k \in \mathbb{N}_0$

Πρόταση: Αν (y_k) εκθετικά φραγμένη με σταθερές (α, M) τότε η Π.Σ του $\hat{y}(z) \supseteq \{z : |z| > \alpha\}$

Απόδειξη:

$$|\hat{y}(z)| = \left|\sum_k y_k z^{-k}\right| \le \sum_k |y_k z^{-k}| = \sum_k \left|\frac{y_k}{z^k}\right| \le M \sum_k \left|\frac{\alpha^k}{z^k}\right| \overset{\alpha v\ |z| > \alpha}{\underset{\theta^k = \left|\frac{\alpha^k}{z^k}\right| < 1}{\Longrightarrow}} \le M \sum_k \theta^k = \frac{M}{1-\theta}$$

Επομένως Π.Σ $\supseteq \{z : |z| > \alpha\}$

Παραδείγματα:

(1) $\delta_k = \begin{cases} 1, & k = 0 \\ 0, & k \neq 0 \end{cases}$ $\qquad \mathcal{Z}\{\delta_k\} = 1 \qquad$ Π.Σ $= \mathbb{C}$

(2) $u_k = \begin{cases} 1 & , k \geq 0 \\ 0 & , k < 0 \end{cases}$ $\quad \mathcal{Z}\{u_k\} = \sum_{k=0}^{\infty} z^{-k} = 1 + z^{-1} + z^{-2} + \dots = \frac{1}{1-z^{-1}} = \frac{z}{z-1}$

αν $|z^{-1}| < 1 \Leftrightarrow \Rightarrow |z| > 1 \leftarrow$ ΠΣ

(3) $y_k = k \quad , k \geq 0$ $\quad \mathcal{Z}\{y_k\} = z^{-1} + 2z^{-2} + 3z^{-3} + \dots = z^{-1}(1 + 2z^{-1} + 3z^{-2} + \dots)$

$\Rightarrow \quad S(x) = x + x^2 + x^3 + \dots = x(1 + x + x^2 + \dots) = \frac{x}{1-x}$

$S'(x) = 1 + 2x + 3x^2 + \dots = \left(\frac{x}{1-x}\right)' = \frac{1}{(1-x)^2} \quad (|x| < 1)$

$\mathcal{Z}\{y_k\} = z^{-1} S'(z^{-1}) = \frac{z^{-1}}{(1-z^{-1})^2} = \frac{z}{(z-1)^2} \Rightarrow |z| > 1$

(4) $y_k = \alpha^k \quad (k \geq 0)$

$\mathcal{Z}\{y_k\} = \sum_{k=0}^{\infty} \alpha^k z^{-k} = \sum_{k=0}^{\infty} (\alpha z^{-1})^k = \frac{1}{1-\alpha z^{-1}} = \frac{z}{z-\alpha}$ αν $|\alpha z^{-1}| < 1 \Rightarrow |z| > \alpha$

(5) $y_k = \rho^k \cos(k\theta) \quad k \geq 0$

$\frac{1}{2}\rho^k e^{i\theta k} + \frac{1}{2}\rho^k e^{-\theta k}$ $\quad \mathcal{Z}\{y_k\} = \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{\infty} (\rho e^{i\theta} z^{-1})^k + \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{\infty} (\rho e^{-i\theta} z^{-1})^k =$

$|\rho e^{\pm i\theta} z^{-1}| < 1 \Rightarrow |z| > \rho$ $\quad = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1-\rho e^{i\theta} z^{-1}} + \frac{1}{1-\rho e^{-i\theta} z^{-1}}\right) = \frac{z - \rho\cos\theta}{z^2 - 2\rho\cos\theta z + \rho^2}$

(6) $y_k = \sum_{i=1}^{m} A_i \alpha_i^k$, $A_i \neq 0 \; \forall i$

$\Big\downarrow \mathcal{Z}$ $\quad$ αν $|\alpha_i| < 1$

$\hat{y}(z) = \sum_i \frac{Az}{z-\alpha_i}$ αν όλοι οι πόλοι είναι μέσα στον μοναδιαίο δίσκο η ακολουθία συγκλίνει στο 0.

Ιδιότητες Μετασχηματισμού

(1) Γραμμικότητα $\quad \mathcal{Z}\{\overbrace{\alpha y_k + \beta x_k}^{w_k}\} = \overbrace{\alpha \hat{y}(z) + \beta \hat{x}(z)}^{\hat{w}(z)}$

Αν $\hat{y}(z)$ έχει ακτίνα σύγκλισης R_y

Αν $\hat{x}(z)$ έχει ακτίνα σύγκλισης R_x

τότε $\hat{w}(z)$ έχει ακτίνα σύγκλισης $\max(R_x, R_y)$

Ε14. Διακριτά Δυναμικά Συστήματα

30/10/2019

2) Μετατόπιση (i) $\mathcal{Z}\{y_{k-n}\} = z^{-n}\hat{y}(z)$ $(n>0)$

(ii) $\mathcal{Z}\{y_{k+n}\} = z^{n}\hat{y}(z) + \sum_{m=0}^{n-1} z^{n-m} y_m$

3) Θεώρημα αρχικής τιμής

$\{y_k\} \xrightarrow{\mathcal{Z}} \hat{y}(z)$

Αν $\lim_{|z|\to\infty} \hat{y}(z) = y_0$ (αν το όριο υπάρχει)

4) Θεώρημα τελικής τιμής

$\{y_k\} \xrightarrow{\mathcal{Z}} \hat{y}(z)$

Αν η $f(z) = (z-1)\hat{y}(z)$ είναι αναλυτική για $|z|>1$

τότε $\lim_{z\to 1} (z-1) g(z) = \lim_{k\to\infty} y_k$

5) Ιδιότητα συνέλιξης

$(x_k) * (y_k) = (w_k)$, $w_k = \sum_{m=0}^{\infty} x_{k-m} y_m$

τότε $\hat{w}(z) = \hat{x}(z)\cdot\hat{y}(z)$ $\Pi.\Sigma_w = \Pi\Sigma_x \cap \Pi\Sigma_y$

6) $\mathcal{Z}\{\alpha^k y_k\} = \hat{y}(z/\alpha)$ $\Pi\Sigma = \Pi\Sigma_y \cdot |\alpha|$

7) Έστω (y_k), $k\in\mathbb{N}_0$ με $\Pi\Sigma$ $|z|>R$ τότε αν $\hat{y}(z) = \mathcal{Z}\{y_k\}$

$$y_k = \frac{1}{2\pi i}\oint_D z^{k-1}\hat{y}(z)\,dz = \sum_i \text{Res}\{z^{k-1}\hat{y}(z)\}_i$$

Παρατήρηση: Έστω $z^{k-1}\hat{y}(z) = \frac{P(z)}{q(z)}$ και έστω $q(z) = \prod_i (z-z_i)^{m_i}$

τότε $\text{Res}\left(\frac{P}{q}, z_i\right) = \lim_{z\to z_i} \frac{1}{(m_i-1)!} \frac{d^{m_i-1}}{dz^{m_i}}\left((z-z_i)^{m} \frac{P(z)}{q(z)}\right)$

Παράδειγμα: $\hat{y}(z) = \frac{z}{(z-2)^2}$ $R=2$

$$y_k = \frac{1}{2\pi i}\oint_D z^{k-1}\hat{y}(z)\,dz = \sum \text{Res}\left(\frac{z^k}{(z-2)^2}, 2\right) = \lim_{z\to 2}\frac{d}{dz}\left((z-2)^2 \frac{z^k}{(z-2)^2}\right)$$

$$= \lim_{z\to 2} k z^{k-1} = k 2^{k-1} = y_k$$

Μάθημα 8º   Ε14. Διακριτά Δυναμικά Συστήματα   5/11/2019

$(y_k)_{k\in\mathbb{N}_0}$, ορίζω $\mathcal{Z}\{y_k\} = \hat{y}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} y_k z^{-k}$

$|y_k| \le M\alpha^k \quad \forall k$ εκθετικά φραγμένη.

Επίλυση εξισώσεων διαφορών

Παράδειγμα: Έστω το ΠΑΤ

$y_{k+2} - 4y_{k+1} + 3y_k = 2^k \quad k \ge 0$

$y_0 = 0 \ , \ y_1 = 1$

Θα χρειαστούμε την ιδιότητα μετατόπισης $\mathcal{Z}\{y_{k+m}\} = z^m \hat{y}(z) + \sum_{m=0}^{m-1} z^{m-m} y_m$

Έστω ότι $\mathcal{Z}\{y_k\} = \hat{y}(z) \Rightarrow \mathcal{Z}\{y_{k+1}\} = z\hat{y}(z) + z\overset{0}{y_0} = z\hat{y}(z)$

$\Rightarrow \mathcal{Z}\{y_{k+2}\} = z^2\hat{y}(z) + z^2 y_0 + z\underset{+1}{y_1} = z^2\hat{y}(z) + z$

Επομένως $z^2\hat{y}(z) + z - 4z\hat{y}(z) + 3\hat{y}(z) = \frac{z}{z-2}$

$\Rightarrow \underbrace{(z^2-4z+3)}_{(z-1)(z-3)}\hat{y}(z) = \frac{z}{z-2} - z \Rightarrow \frac{\hat{y}(z)}{z} = \frac{1}{(z-1)(z-2)(z-3)} - \frac{1}{(z-1)(z-3)}$

$\Rightarrow \frac{\hat{y}(z)}{z} = \frac{1-(z-2)}{(z-1)(z-2)(z-3)} = \frac{3-z}{(z-1)(z-2)(z-3)} = \frac{-1}{(z-1)(z-2)}$

$\Rightarrow \hat{y}(z) = \frac{z}{z-1} - \frac{z}{z-2} \Rightarrow y_k = 1 - 2^k \quad k \ge 0$

Διακριτά Δυναμικά Συστήματα.

Τελεστής που απεικονίζει διανυσματική ακολουθία

$\underline{u} = (\underline{u}_k)_{k\in\mathbb{N}_0} = (\underline{u}_0, \underline{u}_1, \underline{u}_2, \dots)$ (συνάρτηση εισόδου) σε ακολουθία

$\underline{y} = (\underline{y}_k)_{k\in\mathbb{N}_0} = (\underline{y}_0, \underline{y}_1, \dots)$ (συνάρτηση εξόδου)

Συμβολικά $(G_\Sigma \underline{u})_t = \underline{y}_t \quad t \ge 0$ $(\underline{u}_k)_{k\in\mathbb{N}_0} \longrightarrow \boxed{G_\Sigma} \longrightarrow (\underline{y}_k)_{k\in\mathbb{N}_0}$

Ορισμός: Το σύστημα είναι "αιτιατό" (causal) αν η έξοδος $\underline{y}_t$ δεν εξαρτάται από $\{\underline{u}_{t+1}, \underline{u}_{t+2}, \dots\}$, δηλαδή αν $(\underline{u}_t = \underline{v}_t \quad \forall t \leq t_0) \Rightarrow ((G_\Sigma u)_t) = (G_\Sigma v)_t, t \leq t_0)$

Ορισμός: Το σύστημα είναι γραμμικό αν:
(i) $G_\Sigma (u+v) = G_\Sigma u + G_\Sigma v$
(ii) $G_\Sigma (\lambda u) = \lambda G_\Sigma u \quad , \forall \lambda \in \mathbb{R}$.

Παρατήρηση:
Αν G_Σ γραμμικό αιτιατό, τότε $\underline{y}_t = (G_\Sigma u)_t = \sum_{k=0}^{t} G(t,k) \underline{u}_k$
$G(t,k) \in \mathbb{R}^{p \times m} \quad , 0 \leq k \leq t$

Ορισμός: Έστω ο τελεστής μετατόπισης $S(\underline{u}_0, \underline{u}_1, \underline{u}_2, \dots) = (\underline{0}, \underline{u}_0, \underline{u}_1, \underline{u}_2, \dots)$
Θα λέμε το G_Σ είναι χρονικά αναλλοίωτο αν
$S G_\Sigma = G_\Sigma S \Rightarrow S^k G_\Sigma = G_\Sigma S^k$

Πρόταση: Έστω G_Σ γραμμικό, αιτιατό και χρονικά αναλλοίωτο, τότε
$\underline{y}_t = (G_\Sigma u)_t = \sum_{k=0}^{t} \tilde{G}(t-k) u_k \quad , t \geq 0$

Απόδειξη:
Έστω $\underline{\delta} = (\underline{\delta}_k)_{k \in \mathbb{N}_0} = (\underline{\delta}_0, \underline{0}, \underline{0}, \dots)$ (συνάρτηση κρούσης)
$(G_\Sigma \delta)_t = \sum_{k=0}^{t} G(t,k) \underline{\delta}_k = G(t,0) \underline{\delta}_0$
$(S^k G_\Sigma \underline{\delta})_t = G(t-k, 0) \underline{\delta}_0$

$S^k \underline{\delta} = (\underline{0}, \dots, \underline{0}, \underset{k\text{-θέση}}{\delta_0}, \underline{0}, \dots)$
$(G_\Sigma S^k \underline{\delta})_t = G(t,k) \underline{\delta}_0$
Επομένως $G(t-k,0) \underline{\delta}_0 = G(t,k) \underline{\delta}_0 \quad \forall \delta_0 \in \mathbb{R}^m$
$\Rightarrow G(t-k,0) = G(t,k)$

Παρατήρηση. $(G_\Sigma u)_t = \sum_{k=0}^{t} G(t-k) \underline{u}_k = G * u$
$\underline{y}_t = (G_\Sigma u)_t = \sum_{k=0}^{t} G(t-k) u_k = G(t) \underline{u}_0 + G(t-1) \underline{u}_1 + \dots + G_0 \underline{u}_t$
Αν $\underline{u} = \underline{\delta} = (\delta_k) = (\underline{\delta}_0, \underline{0}, \underline{0}, \dots)$
$(y_t) = (G(t) \underline{\delta}_0)_{t \in \mathbb{N}_0} = (G(0) \underline{\delta}_0, G(1) \underline{\delta}_0, \dots)$ "κρουστική απόκριση"

②

Ε14. Διακριτά Δυναμικά Συστήματα

5/11/2019

Ορισμός: Αν $\underline{u} \in \mathbb{R}^n$ τότε $\|u\| = \sqrt{u^T u} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} u_i^2}$

Αν $(\underline{u}_k)_{k\in\mathbb{N}_0} = (\underline{u}_0, \underline{u}_1, \dots)$ τότε (u_k) εκθετικά φραγμένη αν $\exists\, M_1, \alpha_1 > 0$:

$\|u_k\| \le M_1 \alpha_1^k \quad \forall\, k \in \mathbb{N}_0$

Αν $A \in \mathbb{R}^{m\times m}$ τότε $\|A\| = \max_{\|\underline{x}\|=1} \|A\underline{x}\| = \sigma_1(A) = \sqrt{\lambda_{max}(A^T A)}$

Αν $(A_k)_{k\in\mathbb{N}_0}$, τότε η ακολουθία είναι εκθετικά φραγμένη αν $\exists\, M_2, \alpha_2 > 0$:

$\|A_k\| \le M_2 \alpha_2^k \quad \forall\, k \in \mathbb{N}_0$

Πρόταση: Αν $(G_k)_{k\in\mathbb{N}_0}$ εκθετικά φραγμένη με σταθερές (M_2, α_2) και $(\underline{u}_k)_{k\in\mathbb{N}_0}$ εκθετικά φραγμένη με σταθερές (M_1, α_1) τότε $(y_t) = (G_\Sigma u_k)_t = \sum_{k=0}^{t} G(t-k)\, u_k$ είναι εκθετικά φραγμένη και άρα $\hat{y}(z)$ είναι καλά ορισμένος

Απόδειξη:

$$\|y_t\| = \left\|\sum_{k=0}^{t} G(t-k)\, u_k\right\| \le \sum_{k=0}^{t} \underbrace{\|G(t-k)\,\underline{u}_k\|}_{\le \|G(t-k)\|\,\|u_k\| \le M_2 \alpha_2^{t-k} M_1 \alpha_1^k} \le M_1 M_2 \alpha_2^t \sum_{k=0}^{t} \left(\frac{\alpha_1}{\alpha_2}\right)^k$$

$$\le \underbrace{M_1 M_2 \frac{1}{1-\frac{\alpha_1}{\alpha_2}}}_{M_3} \alpha_2^t$$

Ορισμός: Έστω $\{G_k\}_{k\in\mathbb{N}_0}$ εκθετικά φραγμένη, τότε $\hat{G}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} G_k z^{-k}$ είναι η συνάρτηση μεταφοράς του G_Σ