Μάθημα 3ο   Ε14. Διακριτά Δυναμικά Συστήματα   16/10/2019

Σημεία ισορροπίας

Έστω $y_{k+1} = f(y_k)$, $k \in \mathbb{N}_0$

Ορισμός. Το α είναι σημείο ισορροπίας αν $\alpha = f(\alpha)$ (σταθερό σημείο της f)

$y_0 = \alpha \Rightarrow y_1 = f(\alpha) = \alpha \Rightarrow y_2 = y_3 = \dots = \alpha$

Παράδειγμα: Έστω $y_{k+1} = A y_k + B$. Εξετάζουμε $\alpha = A\alpha + B$

$\Rightarrow \alpha = \dfrac{B}{1-A}$, αν $A \neq 1$ έχουμε μοναδικό σ.ι.

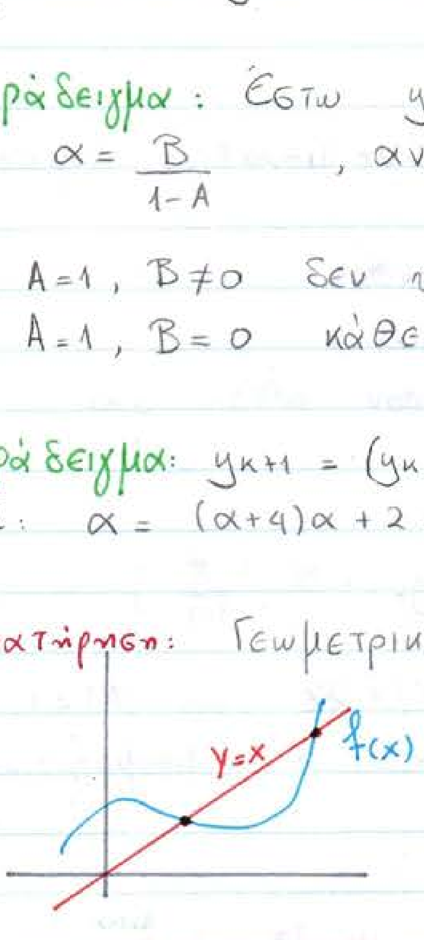
Αν $A = 1$, $B \neq 0$ δεν υπάρχει σ.ι.

Αν $A = 1$, $B = 0$ κάθε $\alpha \in \mathbb{R}$ είναι σ.ι.

Παράδειγμα: $y_{k+1} = (y_k + 4) y_k + 2$, $k \in \mathbb{N}_0$

Σ.Ι.: $\alpha = (\alpha+4)\alpha + 2 \Rightarrow \alpha^2 + 3\alpha + 2 = 0 \Rightarrow (\alpha+1)(\alpha+2) = 0 \Rightarrow \alpha = -1,\ \alpha = -2$

Παρατήρηση: Γεωμετρικά τα σταθεράσημεία της $f(x)$ είναι τα σημεία τομής με την $y = x$



Ορισμός: Αν α είναι σημείο ισορροπίας της $y_{k+1} = f(y_k)$, τότε το α είναι ευσταθές κατά Lyapunov, αν $\forall \varepsilon > 0\ \exists\ \delta = \delta(\varepsilon) > 0 : |y_0 - \alpha| < \delta \Rightarrow |y_k - \alpha| < \varepsilon \quad \forall k \in \mathbb{N}_0$

Ορισμός: Αν το α δεν είναι ευσταθές κατά Lyapunov τότε είναι ασταθές σημείο ισορροπίας

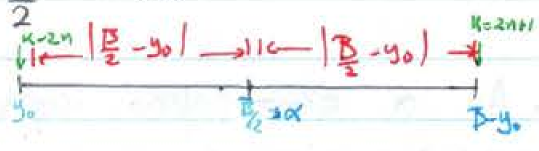
Ορισμός: Ένα σημείο ισορροπίας α θα λέγεται σημείο έλξης αν $\exists\, \eta > 0$ τέτοιο ώστε αν $|y_0 - \alpha| < \eta \Rightarrow \lim\limits_{k \to \infty} y_k = \alpha$. Αν $\eta = \infty$, τότε το α είναι

είναι καθολικό σημείο έλξης.

Ορισμός. Το α είναι ασυμπτωτικά ευσταθές αν:
(i) είναι ευσταθές κατά Lyapunov και
(ii) είναι σημείο έλξης.
Αν το $\eta=\infty$ (στον ορισμό του σημείου έλξης), τότε το α είναι καθολικά ασυμπτωτικά ευσταθές.

Θεώρημα: Έστω η εξίσωση $y_{k+1} = Ay_k + B$ $(A \neq 1)$ με μοναδικό σημείο ισορροπίας $\alpha = B/(1-A)$ τότε:
(i) Αν $|A| < 1 \Rightarrow \alpha$ καθολικά ασυμπτωτικά ευσταθές
(ii) Αν $|A| > 1 \Rightarrow \alpha$ ασταθές σημείο ισορροπίας
(iii) Αν $|A| = -1 \Rightarrow \alpha$ είναι ευσταθές κατά Lyapunov αλλά όχι ασυμπτωτικά ευσταθές.

Απόδειξη.
(i) Η λύση της εξίσωσης $y_k = A^k(y_0-\alpha)+\alpha$ $\left(= A^k y_0 + B\,\frac{1-A^k}{1-A}\right)$
$\Rightarrow |y_k-\alpha| = |A^k|\,|y_0-\alpha|$
Αν $\varepsilon>0$, $\delta=\varepsilon$ τότε αν $|y_0-\alpha|<\delta=\varepsilon \Rightarrow |y_k-\alpha| = |A^k|\,\varepsilon<\varepsilon$ αν $|A|<1$
$\Rightarrow$ ευστάθεια Lyapunov και $\lim |y_k-\alpha|=0 \Rightarrow y_k\to\alpha \Rightarrow \alpha$ ασυμπυμπτωτικά ευσταθές και μάλιστα καθολική.
(iii) Αν $A=-1$, τότε $y_k = (-1)^k\left(y_0-\frac{B}{2}\right)+\frac{B}{2}$ $k\in\mathbb{N}_0$
Αν $k=2n \Rightarrow y_k=y_0$
Αν $k=2n+1 \Rightarrow y_k = \frac{B}{2}+\frac{B}{2}-y_0 = B-y_0$

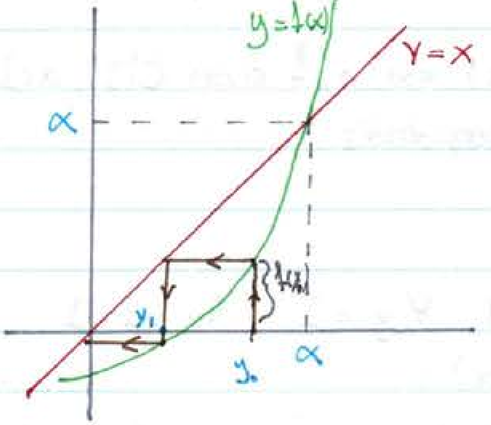


Αν $\varepsilon>0$, $\delta=\varepsilon$
$|y_0-\frac{B}{2}|<\delta=\varepsilon \Rightarrow |y_k-\frac{B}{2}|<\varepsilon\ \forall k\in\mathbb{N}_0$ (ευστάθεια Lyapunov)
$y_k \not\to \frac{B}{2}$ (όχι ασυμπτωτική ευστάθεια)

Ε14. Διακριτά Δυναμικά Συστήματα

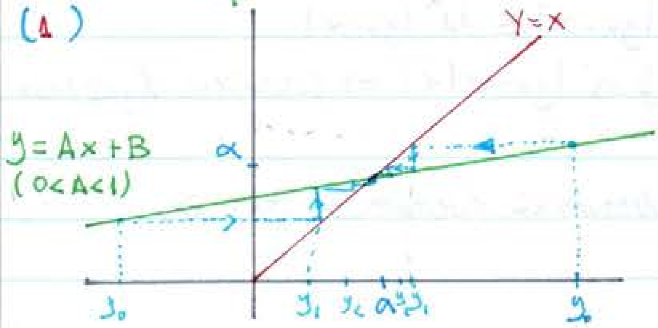
16/10/2019

Γραφική μέθοδος χαρακτηρισμού σημείου ισορροπίας

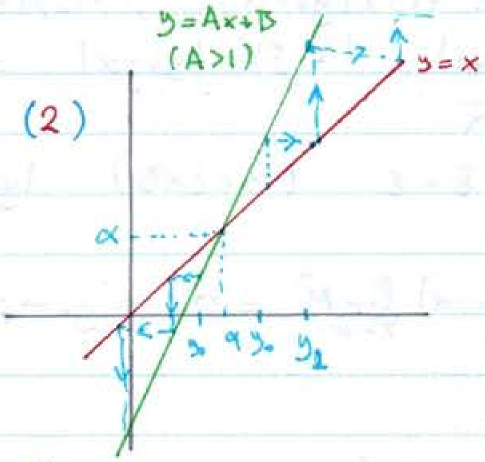


Παραδείγματα:

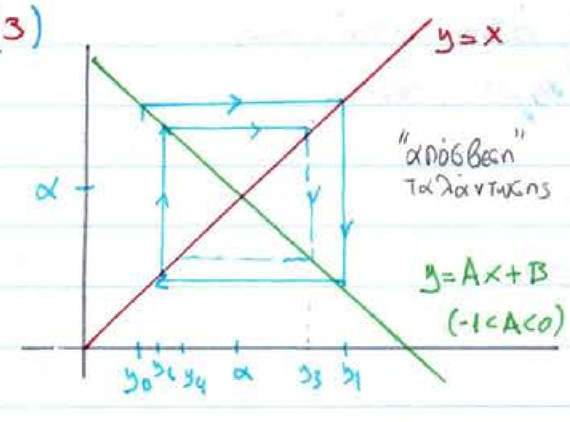
(1)



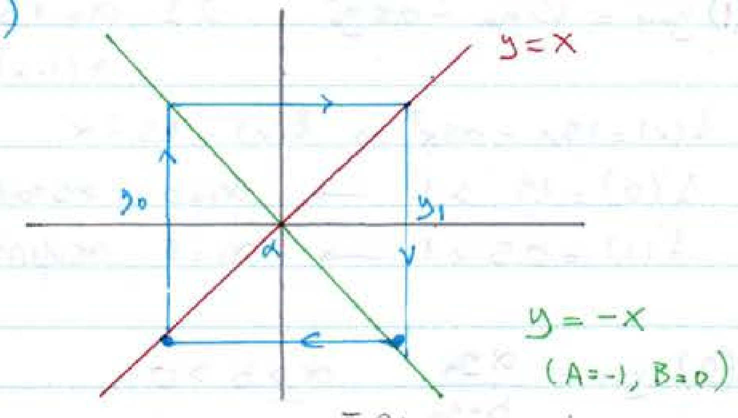
(2)



(3)



(4)



Ταλάντωση χωρίς απόσβεση.

$y_{k+1} = f(y_k)$

$\alpha = f(\alpha)$

$y_k = \alpha + u_k$ (u_k η απόσταση από το σημείο ισορροπίας)

$y_{k+1} = \alpha + u_{k+1} = f(\alpha + u_k) \cong f(\alpha) + f'(\alpha) u_k = f(\alpha) + f'(\alpha)(y_k - \alpha)$

$\Rightarrow y_{k+1} \cong \underbrace{f'(\alpha)}_{A} y_k + \underbrace{(f(\alpha) - \alpha f'(\alpha))}_{B}$

Έτσι περιμένω ότι αν: $|f'(\alpha)| < 1 \Rightarrow$ Ασυμπτωτική Ευστάθεια
$|f'(\alpha)| > 1 \Rightarrow$ Αστάθεια

Θεώρημα: Έστω $y_{k+1} = f(y_k)$ $k \in \mathbb{N}_0$. Έστω $\alpha = f(\alpha)$ και η f είναι $C'(I)$, $\alpha \in I$
(i) $|f'(\alpha)| < 1 \Rightarrow \alpha$ ασυμπτωτικά ευσταθές σημείο ισορροπίας
(ii) $|f'(\alpha)| > 1 \Rightarrow \alpha$ ασταθές σημείο ισορροπίας

Απόδειξη:
(i) Έστω $|f'(\alpha)| < 1 \Rightarrow \exists\ I = (\alpha - B, \alpha + B)$ $;\ |f'(y)| \leq M < 1$ $\forall y \in I$. Αν $y_0 \in I$
από το θεώρημα μέσης τιμής $\exists\ \xi \in (\alpha, y_0)$ ή $\xi \in (y_0, \alpha)$:
$f(y_0) - f(\alpha) = f'(\xi)(y_0 - \alpha)$, $|f'(\xi)| \leq M < 1$ $\Rightarrow$
$|\underbrace{f(y_0)}_{y_1} - \underbrace{f(\alpha)}_{\alpha}| = |f'(\xi)|\,|y_0 - \alpha| \Rightarrow |y_1 - \alpha| \leq M|y_0 - \alpha|$ επαγωγικά
$\Rightarrow |y_k - \alpha| \leq M^k |y_0 - \alpha|$
Αν $\varepsilon > 0$ και $\delta = \varepsilon$ $(0 < \varepsilon < B)$ $|y_0 - \alpha| < \underset{\varepsilon}{\overset{\delta}{\shortparallel}} \Rightarrow |y_k - \alpha| < \varepsilon \Rightarrow$ ευστάθεια Lyapunov

$\lim_{k\to\infty} |y_k - \alpha| = |y_0 - \alpha| \cdot \lim_{k\to\infty} M^k = 0 \Rightarrow y_k \to \alpha \Rightarrow$ ασυμπτωτική ευστάθεια του α.

Παραδείγματα:
(1) $y_{n+1} = 1.5 y_n - 0.5 y_n^2$ $\quad$ Σ.Ι.: $\alpha = 1.5\alpha - 0.5\alpha^2 \Rightarrow 0.5\alpha - 0.5\alpha^2 = 0 \Rightarrow$
$\alpha(1-\alpha) = 0 \Rightarrow \alpha_1 = 0$, $\alpha_2 = 1$
$f(x) = 1.5x - 0.5x^2 \Rightarrow f'(x) = 1.5 - x$
$f'(0) = 1.5 > 1 \longrightarrow \alpha_1 = 0$ ασταθές σ.ι.
$f'(1) = 0.5 < 1 \longrightarrow \alpha_2 = 1$ ασυμπτωτικά ευσταθές.

(2) $y_{k+1} = \dfrac{\alpha y_k}{b + y_k}$ $\quad \alpha > b > 0$

Σ.Ι.: $x = \dfrac{\alpha x}{b + x} \Rightarrow x^2 + (b - \alpha)x = 0$ → $x = 0$, $x = \alpha - b$

$f(x) = \dfrac{\alpha x}{bx} \Rightarrow f'(x) = \dfrac{\alpha(b+x) - \alpha x}{(b+x)^2} = \dfrac{\alpha b}{(b+x)^2}$

$f'(0) = \dfrac{\alpha b}{b^2} = \dfrac{\alpha}{b} > 1 \Rightarrow$ αστάθεια
$f'(\alpha - b) = \dfrac{\alpha b}{\alpha^2} = \dfrac{b}{\alpha} < 1 \Rightarrow$ ασυμπτωτική ευστάθεια.