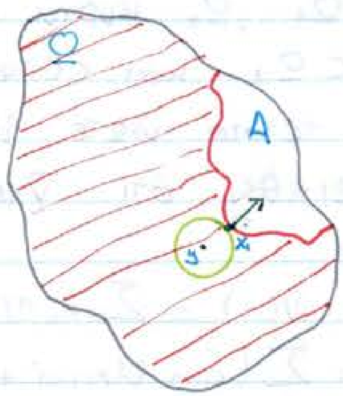
Μάθημα 10ο ΕΒ. Μερικές Διαφορικές Εξισώσεις Ι Μπαρμπάτης 16/5/2019

Θεώρημα (Ισχυρή αρχή μεγίστου)
Έστω $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ φραγμένο χωρίο και $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ τέτοια ώστε $Lu = 0$. Αν υπάρχει $x_0 \in \Omega$ τέτοιο ώστε $u(x_0) = \max\limits_{\overline{\Omega}} u$ τότε η u σταθερή.

Απόδειξη:
Έστω $M = \max\limits_{\overline{\Omega}} u$ και $A = \{x \in \Omega : u(x) = M\}$. Θα δείξουμε ότι $A = \Omega$.
Έστω αντίθετα ότι $\exists\, y \in \Omega \setminus A$. Έστω $r = dist(y, A) > 0$ χωρίς περιορισμό της γενικότητας μπορούμε να υποθέσουμε ότι $r < dist(y, \partial\Omega)$
Υπάρχει τότε $x_1 \in A \cap \partial B(y,r)$
Θεωρούμε το χωρίο $\Omega \setminus A$.
Το $\Omega \setminus A$ ικανοποιεί τη συνθήκη εσωτερικής μπάλας στο $x_1 \in \partial(\Omega \setminus A)$
Επιπλέον έχουμε:
$Lu \leq 0$ στο $\Omega \setminus A$
$u(x) < M$ στο $\Omega \setminus A$
$u(x_1) = M$



Από το λήμμα του Hopf έχουμε $\nabla u(x_1) \cdot (x_1 - y) > 0$
Άτοπο, αφού $\nabla u(x_1) = 0$

Ορισμός: Λέμε ότι ο L δίνεται (ή είναι) σε μορφή απόκλισης αν
$$Lu = -\sum_{i,j=1}^{n} (a_{ij}(x) u_{x_i})_{x_j} = -\operatorname{div}(A(x) \nabla u(x))$$

Υποθέτουμε ότι ο L είναι σε μορφή απόκλισης και θεωρούμε το π.σ.τ. Dirichlet:
$$\begin{cases} Lu = f & \text{στο } \Omega \\ u = g & \text{στο } \partial\Omega \end{cases} \qquad (\Omega \text{ φραγμένο, ομαλό, } f \in C(\Omega),\ g \in C(\partial\Omega))$$

Ορίζουμε $\mathcal{A} = \{w \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega}) : w = g \text{ στο } \partial\Omega\}$ και για $w \in \mathcal{A}$
$$I[w] = \int_\Omega \left(\tfrac{1}{2} \sum a_{ij}(x) w_{x_i} w_{x_j} - wf\right) dx$$

Θεώρημα (αρχή του Dirichlet)

Μια συνάρτηση $u \in A$ είναι λύση του προβλήματος Dirichlet αν και μόνο αν $I[u] = \min_{w \in A} I[w]$

Απόδειξη: Όμοια με την απόδειξη του θεωρήματος στο "Μάθημα 8ο" αλλά αντί της

$$|\nabla u \cdot \nabla w| \le \frac{1}{2}|\nabla u|^2 + \frac{1}{2}|\nabla w|^2$$ χρησιμοποιούμε την

$$\left|\sum \alpha_{ij}(x) u_{x_i} w_{x_j}\right| \le \frac{1}{2}\sum \alpha_{ij} u_{x_i} u_{x_j} + \frac{1}{2}\sum \alpha_{ij} w_{x_i} w_{x_j}$$

Άσκηση 11: (i) Να αποδειχθεί ότι αν η συνάρτηση $u(x)$ είναι αρμονική στο $\mathbb{R}^n$ τότε και η $v(x) = x \cdot \nabla u(x)$ είναι αρμονική

(ii) Έστω Ω_1, Ω_2 κυρτά και φραγμένα χωρία στο $\mathbb{R}^n$ τέτοια ώστε $0 \in \Omega_1 \subset\subset \Omega_2$ και έστω $\Omega = \Omega_2 \setminus \overline{\Omega}_1$. Έστω $u \in C^2(\overline{\Omega})$ αρμονική στο Ω και τέτοια ώστε $u = 1$ στο $\partial\Omega_1$ και $u = 0$ στο $\partial\Omega_2$

Να αποδειχθεί ότι $\nabla u(x) \, x < 0$ στο Ω.

Λύση:

(i) Έχουμε $v(x) = \sum_i x_i u_{x_i}(x)$

$$\Rightarrow v_{x_k}(x) = \sum_i \left(\delta_{ik} u_{x_i}(x) + x_i u_{x_i x_k} \right)$$

$$\Rightarrow v_{x_k x_k}(x) = \sum_i \left[\delta_{ik} u_{x_i x_k} + \delta_{ik} u_{x_i x_k} + x_i u_{x_i x_k x_k} \right]$$

$$\Rightarrow \Delta v = \sum_{i,k} \left[2\delta_{ik} u_{x_i x_k} + x_i u_{x_i x_k x_k} \right] = 2\Delta u + x \nabla u = 0.$$

(ii) Από την ισχυρή αρχή μεγίστου έχουμε $0 < u(x) < 1$ στο Ω.

$\nabla u(x) \, x \le 0$ στο $\partial\Omega_1$ και στο $\partial\Omega_2$.

Από την ασθενή αρχή μεγίστου $\nabla u(x) \cdot x \le 0$ στο Ω

Για να δείξουμε ότι $\nabla u(x) \, x < 0$ στο Ω, υποθέτουμε για άτοπο ότι $\nabla u(x_0) \cdot x_0 = 0$ σε κάποιο $x_0 \in \Omega$.

Τότε από ισχυρή αρχή μεγίστου $x \cdot \nabla u(x) = 0$ στο $\overline{\Omega}$

$$-1 = u(x_2) - u(x_1) = \int_0^1 \frac{d}{dt} u(x_1 + t(x_2 - x_1))\, dt = \int_0^1 (\nabla u)(x_1 + t(x_2 - x_1)) \cdot (x_2 - x_1)\, dt = 0$$

$(x_2 \in \partial\Omega_2, \ x_1 \in \partial\Omega_1)$ είναι παράλληλα

ΕΘ. Μερικές Διαφορικές Εξισώσεις Ι Μπαρμπάτης 16/5/2019

Άσκηση 10: Αποδείξτε πως αν η $u \in C^2(\Omega)$ είναι αρμονική και η $\varphi \in C^2(\mathbb{R})$ είναι κυρτή, τότε η σύνθεση $v = \varphi(u)$ είναι υφαρμονική, δηλαδή $\Delta v \geq 0$ στο Ω

Λύση:

Έχουμε $v(x) = \varphi(u(x)) \rightsquigarrow v_{x_i}(x) = \varphi'(u(x))u_{x_i}(x)$

$\rightarrow v_{x_i x_i}(x) = \varphi''(u(x))u_{x_i}^2(x) + \varphi'(u(x))u_{x_i x_i}(x)$

$\rightsquigarrow (\Delta v)(x) = \varphi''(u(x))|\nabla u|^2 + \varphi'(u(x))\cancelto{0}{\Delta u} \geq 0.$

Άσκηση 13. Έστω $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ φραγμένο χωρίο με ομαλό σύνορο. Να δειχθεί ότι το μη-γραμμικό πρόβλημα συνοριακών τιμών

$$\begin{cases} \Delta u = u^3 &, \text{ στο } \Omega \\ u = 0 &, \text{ στο } \partial\Omega \end{cases}$$

έχει μόνο τη μηδενική λύση

Λύση.

Έστω ότι έχει 2 λύσεις u_1, u_2 τότε

$W = u_1 - u_2 = 0$ σταθερή και $\Delta w - (u_1^3 - u_2)^3$

$\Delta w = (u_1 - u_2)(u_1^2 + u_1u_2 + u_2) = w \cdot (u_1^2 + u_1u_2 + u_2^2) \iff$

$w \cdot \Delta w = w^2(u_1^2 + u_1u_2 + u_2^2) \iff w\,\Delta w - \sum (ww_{x_i})_{x_i} - |\nabla w|^2$

$$\int_\Omega \sum (ww_{x_i})_{x_i}\,dx = \int_{\partial\Omega} w\,\vec{\nabla}\vec{w}\vec{n}\,dx = 0$$

$$\int_\Omega w\,\Delta w\,dx = -\int_\Omega |\nabla w|^2 dx = \int_\Omega w^2(u_1^2 + u_1u_2 + u_2^2)\,dx > 0$$

$$\left.\begin{matrix} \Delta w = 0 \\ w = 0 \text{ στο } \theta \end{matrix}\right\} \Rightarrow W = 0.$$