Μάθημα 6ο ΕΒ. Μερικές Διαφορικές Εξισώσεις Ι Μπαρμπάτης 4/4/2019

Πρόταση: Έστω Ω χωρίο του $\mathbb{R}^n$ (ανοιχτό, συνεκτικό) και $M>0$
Το σύνολο $A=\{u$ αρμονικές στο Ω, $|u|\le M\}$
είναι συμπαγές ως προς την τοπολογία της τοπικά ομοιόμορφης σύγκλισης στο Ω

Απόδειξη:
Έστω $(u_n)\subset A$. Έστω $K\subset\subset\Omega$. Έστω $r=dist(K,\partial\Omega)>0$
έστω $x\in K$. Τότε

$$|\nabla u_k(x)|\le \frac{C}{r^{n+1}}\int_{B(x,r)}|u_k(y)|\,dy\le \frac{C}{r^{n+1}}M\,\alpha_n r^n\le \frac{C_n M}{r}$$

Άρα έχουμε $|u_k|\le M$, στο K
$|\nabla u_k|\le \frac{C_n M}{r}$, στο K

Άρα από Arzela-Ascoli υπάρχει υπακολουθία της (u_k) (και θεωρούμε ότι είναι η ίδια η (u_k)) η οποία συγκλίνει ομοιόμορφα στο K.
Θεωρούμε ακολουθία συνόλων $K_n\subset\subset\Omega$ τ.ω.:
(i) $K_{n+1}\supset K_n$
(ii) $\bigcup_n K_n=\Omega$
Υπάρχει υπακολουθία $(u_{1,k})_k$ της (u_n) η οποία συγκλίνει ομοιόμορφα στο K_1
$u_{1,k}\longrightarrow g_1$ ομ. στο K_1
Η $(u_{1,k})$ έχει υπακολουθία $(u_{2,k})$ η οποία συγκλίνει ομοιόμορφα στο K_2
$u_{2,k}\longrightarrow g_2$ ομ. στο K_2.
Προφανώς $g_1=g_2$ στο K_1
κ.ο.κ. Έχουμε για κάθε $j\in\mathbb{N}$ ακολουθία $(u_{j,k})_k$, υπακολουθία της $(u_{j-1,k})_k$ τ.ω. $u_{j,k}\longrightarrow g_j$ ομ. στο K_j
ισχύει $g_j=g_{j-1}$ στο K_{j-1}
Ορίζεται μια συνάρτηση g στο Ω από τη σχέση $g|_{K_j}=g_j$
Θέτουμε $v_k=u_{k,k}$
Τότε $v_k\longrightarrow g$ τοπικά ομοιόμορφα

Υφαρμονικές Συναρτήσεις

Ορισμός: Μια συνάρτηση $u \in C(\Omega)$ λέγεται υφαρμονική αν $\forall B(x,r) \subset\subset \Omega$

$$u(x) \leq \fint_{B(x,r)} u(y)\,dy \quad , \quad u(x) \leq \fint_{\partial B(x,r)} u(y)\,dS(y)$$

Παρατηρήσεις: (1) Αν $u \in C^2(\Omega)$ τότε u υφαρμονική $\Leftrightarrow$ $\Delta u \geq 0$ στο Ω

(2) Η ασθενή και ισχυρή αρχή μεγίστου ισχύει για υφαρμονικές συναρτήσεις

Ορισμός: Η $u \in C(\Omega)$ λέγεται τοπικά υφαρμονική αν $\forall x \in \Omega$ $\exists r_0 > 0$ ώστε για $0 < r < r_0$

$$u(x) \leq \fint_{\partial B(x,r)} u(y)\,dS(y)$$

Πρόταση: Η αρχή μεγίστου ισχύει για τοπικά υφαρμονικές συναρτήσεις.

Πρόταση: Αν οι u_1, u_2 είναι υφαρμονικές τότε και η $u = \max\{u_1, u_2\}$ είναι υφαρμονική

Απόδειξη:

Έστω $B(x,r) \subset\subset \Omega$, τότε $u_1(x) \leq \fint_{\partial B(x,r)} u_1(y)\,dS(y) \leq \fint_{\partial B(x,r)} u(y)\,dS(y)$

$u_2(x) \leq \fint_{\partial B(x,r)} u_2(y)\,dS(y) \leq \int_{\partial B(x,r)} u(y)\,dS(y)$

Άρα $u(x) \leq \fint_{\partial B(x,r)} u(y)\,dS(y)$

Συμβολισμός: Έστω $u \in C(\Omega)$ και $B(\xi,\rho) \subset\subset \Omega$

Συμβολίζουμε με $u_{\xi,\rho}$ τη μοναδική συνάρτηση που είναι συνεχής στο Ω και

$$\begin{cases} u_{\xi,\rho} = u & \text{στο } \Omega \setminus B(\xi,\rho) \\ \Delta u_{\xi,\rho} = 0 & \text{, στο } B(\xi,\rho) \end{cases}$$

ΣΕΜ. Μερικές Διαφορικές Εξισώσεις I Μπαρμπάτης 4/4/2019

Λήμμα: Αν η u είναι τοπικά υφαρμονική τότε $u \le u_{\xi,\rho}$ στο Ω

Απόδειξη:
Η $u-u_{\xi,\rho}$ είναι τοπικά υφαρμονική στην $B(\xi,\rho)$
Είναι ίση με 0 στο $\partial B(\xi,\rho)$
Από αρχή μεγίστου έπεται ότι $u-u_{\xi,\rho} \le 0$ στο $B(\xi,\rho)$
Άρα $u \le u_{\xi,\rho}$ στο Ω

Πρόταση: Αν η u είναι τοπικά υφαρμονική τότε είναι υφαρμονική

Απόδειξη:
Έστω $B(x,\rho) \subset\subset \Omega$ Τότε $u(x) \le u_{x,\rho}(x) = \fint_{\partial B(x,\rho)} u_{x,\rho}(y)\,dS(y) = \fint_{\partial B(x,\rho)} u(y)\,dS(y)$
άρα u υφαρμονική

Λήμμα: Αν η u είναι υφαρμονική τότε και η $u_{\xi,\rho}$ είναι υφαρμονική

Απόδειξη:
Πρέπει να δείξουμε ότι $\forall x \in \Omega$ και $r>0$ αρκετά μικρό έχουμε
$u_{\xi,\rho}(x) \le \fint_{\partial B(x,r)} u_{\xi,\rho}(y)\,dS(y)$
Αυτό είναι άμεσο αν $x \in \Omega \setminus \overline{B(\xi,\rho)}$ ή $x \in B(\xi,\rho)$
Έστω $x \in \partial B(\xi,\rho)$, τότε

$$u_{\xi,\rho}(x) = u(x) \le \fint_{\partial B(x,r)} u(y)\,dS(y) \le \fint_{\partial B(x,r)} u_{\xi,\rho}(y)\,dS(y)$$

Το πρόβλημα του Dirichlet - Η μέθοδος του Perron

$\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ χωρίο (ανοικτό, συνεκτικό)

$$\begin{cases} \Delta u = 0, & \text{στο } \Omega \\ u = g, & \text{στο } \partial\Omega \end{cases}$$

όπου $g \in C(\partial\Omega)$. Ζητάμε λύση $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$

Ιδέα της μεθόδου
$A = \{u \in C(\overline{\Omega}),\ u \text{ υφαρμονική } u \le g \text{ στο } \partial\Omega\}$
Έστω ότι έχουμε μια λύση w του προβλήματος Dirichlet. Τότε $w \in A$
Έστω $u \in A$, τότε η $u-w$ είναι υφαρμονική και $u-w\big|_{\partial\Omega} \le g-g=0$

Άρα από αρχή μεγίστου $u \le w$ στο $\underline{\Omega}$

Άρα $w(x) = \sup_{u \in A} u(x)$

Από την συνέχεια της g υπάρχουν $m, M \in \mathbb{R}$ τ.ω $m \le g(x) \le M, x \in \partial\underline{\Omega}$

ορίζουμε $A = \{u \in C(\overline{\underline{\Omega}})$, u υφαρμονική $u \le g$ στο $\partial\underline{\Omega}\}$

Τότε $A \neq \emptyset$ αφού η σταθερή συνάρτηση $u(x) = m$ ανήκει στο A

Επίσης από την αρχή μεγίστου έχουμε $u(x) \le M$, στο $\underline{\Omega}$ $\forall u \in A$

Θέτουμε

$$W(x) = \sup_{u \in A} u(x) \quad , x \in \underline{\Omega}$$

Άσκηση 7: Έστω $\underline{\Omega}$ φραγμένο και $\underline{\Omega}^* = \mathbb{R}^n \setminus \overline{\underline{\Omega}}$

$$(*)\begin{cases} \Delta u = 1 & , \text{στο } \underline{\Omega}^* \\ u = g & , \text{στο } \partial\underline{\Omega}^* \end{cases}$$

Δείξτε ότι έχει το πολύ μια λύση u τέτοια ώστε $\lim_{|x| \to +\infty} u(x) = 0$

Λύση

Έστω u_1, u_2 λύσεις του $(*)$. Έστω $V = u_2 - u_1$ τότε

$$\begin{cases} \Delta v = 0 & , \text{στο } \underline{\Omega}^* \\ V = 0 & \text{στο } \partial\underline{\Omega}^* \\ \lim_{|x| \to \infty} V(x) = 0 \end{cases}$$

Έστω $x \in \underline{\Omega}^*$. Έστω $r > 0$ τω $\overline{\underline{\Omega}} \cup \{x\} \subset B(r)$. Εφαρμόζουμε αρχή μεγίστου στο $B(r) \setminus \overline{\underline{\Omega}}$ και παίρνουμε $\underline{\Omega}^* \cap B(r)$

$$V(x) \le \max_{\partial(B(r) \setminus \overline{\underline{\Omega}})} V = \max\left\{ \max_{\partial B(r)} V , \max_{\partial \underline{\Omega}^*} V \right\} =$$

$= \max\left\{0, \max_{\partial B(r)} V\right\} < \varepsilon$ για r αρκετά μεγάλα.

Αφού ε τυχόν $V(x) \le 0$. Παρόμοια παίρνουμε $V(x) \ge 0$

Άρα $V = 0$.