Μάθημα 5º ΕΒ. Μερικές Διαφορικές Εξισώσεις Ι Μπαρμπάτης 28/3/2019

Συνέχεια Απόδειξης:

$$(\Delta u)(x) = \lim_{\varepsilon\to 0} \overbrace{\int_{|y|=\varepsilon} \psi(y)\frac{\partial f}{\partial \vec{n}}(x-y)\,dS(y)}^{L_\varepsilon} - \lim_{\varepsilon\to 0} \overbrace{\int_{|y|=\varepsilon} \frac{\partial \psi}{\partial \vec{n}}(y) f(x-y)\,dS(y)}^{S_\varepsilon}$$

Έστω $M>0$ τω $|\nabla f| \le M$ στο $\mathbb{R}^n$ τότε

$$|L_\varepsilon| \le \int_{|y|=\varepsilon} \frac{1}{n(n-2)\alpha_n}\varepsilon^{2-n} M\, dS(y) = \frac{M\,\varepsilon^{2-n}}{n(n-2)\alpha_n} n\alpha_n \varepsilon^{n-1} \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{} 0$$

έχουμε $\frac{\partial \psi}{\partial \vec{n}} = \nabla\psi(y)\cdot\vec{n} = \frac{1}{n(n-2)\alpha_n}(2-n)|y|^{-n} y \cdot \frac{y}{\varepsilon} =$

$$= -\frac{1}{n\alpha_n\varepsilon}\varepsilon^{2-n} = -\frac{1}{n\alpha_n}\varepsilon^{1-n}$$

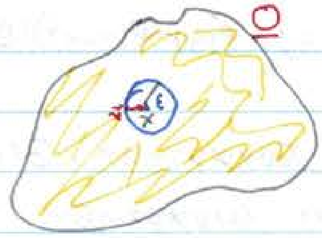
Άρα

$$S_\varepsilon = -\frac{1}{n\cdot\alpha_n\varepsilon^{n-1}}\int_{|y|=\varepsilon} f(x-y)\,dS(y) = -\frac{1}{|\partial B(\varepsilon)|}\int_{|y|=\varepsilon} f(x-y)\,dS(y)$$

$$= -\fint_{\partial B(x,\varepsilon)} f\, dS(y) \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{} -f(x)$$ (κάπου πιο πριν κάναμε λάθος θέλουμε $+f(x)$)

Η συνάρτηση Green

Έστω $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ φραγμένο με ομαλό σύνορο (πχ C^2)
Έστω $u\in C^2(\overline{\Omega})$ Έστω $x\in\Omega$. Για $\varepsilon>0$
ορίζουμε $\Omega_\varepsilon = \Omega\setminus B(x,\varepsilon)$



Ταυτότητα Green στο Ω_ε:

$$\int_{\Omega_\varepsilon} u(y)(\Delta\psi)(y-x)\,dy - \int_{\Omega} \psi(y-x)(\Delta u)(y)\,dy =$$

$$= \int_{\partial\Omega_\varepsilon} u(y)\frac{\partial\psi}{\partial\vec{n}}(y-x)\,dS(y) - \int_{\partial\Omega_\varepsilon}\psi(y-x)\frac{\partial u}{\partial\vec{n}}(y)\,dS(y)$$

Έστω $M>0$ τω $|u|, |\nabla u|, |\nabla^2 u| \le M$ στο $\overline{\Omega}$ έχουμε

$$\left|\int_{\partial B(x,\varepsilon)} \psi(y-x)\frac{\partial u}{\partial\vec{n}}\,dS(y)\right| \le C_n\varepsilon^{2-n} M\, n\,\alpha_n\,\varepsilon^{n-1} \xrightarrow{\varepsilon\to 0} 0$$

Επίσης

$$\int_{\partial B(x,\varepsilon)} u(y)\frac{\partial\psi}{\partial\vec{n}}(y-x)\,dS(y) = -\int_{\partial B(x,\varepsilon)} u(y)\frac{2-n}{n(n-2)\alpha_n}|y-x|^{-n}(y-x)\cdot\frac{y-x}{\varepsilon}\,dS(y) =$$

$$= \frac{1}{n \cdot \alpha_n} \varepsilon^{1-n} \int_{\partial B(x,\varepsilon)} u(y)\, dS(y) = \fint_{\partial B(x,\varepsilon)} u\, dS \longrightarrow u(x)$$

Παίρνοντας όριο $\varepsilon \to 0$ έχουμε:

$$-\int_{\Omega} \Psi(y-x)(\Delta u)(y)\,dy = u(x) + \int_{\partial\Omega} u(y) \frac{\partial \Psi}{\partial \vec{n}}(y-x)\, dS(y) - \int_{\partial\Omega} \Psi(y-x) \frac{\partial u}{\partial \vec{n}}(y)\, dS(y)$$

$$\Rightarrow u(x) = -\int_{\Omega} \Psi(y-x)(\Delta u)(y)\,dy - \int_{\partial\Omega} \frac{\partial \Psi}{\partial \vec{n}}(y-x)\, u(y)\, dS(y) + \int_{\partial\Omega} \Psi(y-x) \frac{\partial u}{\partial \vec{n}}(y)\, dS(y)$$

Θεωρούμε (για σταθερό $x \in \Omega$) το πρόβλημα συνοριακών τιμών.

$$(*) \begin{cases} \Delta \varphi^x = 0 &, \text{ στο } \Omega \\ \varphi^x(y) = \Psi(y-x) &, \text{ στο } \partial\Omega \end{cases}$$

Έστω $\varphi^x(y)$ λύση του $(*)$

Εφαρμόζουμε τύπο Green

$$-\int_{\Omega} \varphi^x(y)(\Delta u)(y)\,dy = \int_{\partial\Omega} u \frac{\partial \varphi^x}{\partial \vec{n}}(y)\,dS(y) - \int_{\partial\Omega} \varphi^x(y) \frac{\partial u}{\partial \vec{n}}(y)\,dS(y) =$$

$$= \int_{\partial\Omega} u \frac{\partial \varphi^x}{\partial \vec{n}}(y)\,dS(y) - \int_{\partial\Omega} \Psi(y-x) \frac{\partial u}{\partial \vec{n}}(y)\, dS(y)$$

Άρα $u(x) = \int_{\Omega} (\varphi^x(y) - \Psi(y-x))(\Delta u)(y)\,dy + \int_{\partial\Omega} \left(\frac{\partial \varphi^x}{\partial \vec{n}}(y) - \frac{\partial \Psi}{\partial \vec{n}}(y-x)\right) u(y)\, dS(y)$

Ορισμός: Η συνάρτηση $G(x,y) = \Psi(y-x) - \varphi^x(y)$ $\quad x,y \in \Omega \quad x \neq y$ ονομάζεται συνάρτηση Green του Ω

Άρα $u(x) = -\int_{\Omega} G(x,y)(\Delta u)(y)\,dy - \int_{\partial\Omega} \frac{\partial G}{\partial \vec{n}}(y-x)\, u(y)\, dS(y)$

Θεώρημα: Αν η $u \in C^2(\overline{\Omega})$ είναι λύση του προβλήματος Dirichlet

$$\begin{cases} -\Delta u = f &, \text{ στο } \Omega \qquad (f, g \text{ συνεχείς}) \\ u = g &, \text{ στο } \partial\Omega \end{cases}$$

Τότε η u δίνεται από τη σχέση

$$u(x) = \int_{\Omega} G(x,y) f(y)\,dy - \int_{\partial\Omega} \frac{\partial G}{\partial \vec{n}}(y-x)\, g(y)\, dS(y)$$

Ο πυρήνας του Poisson

Θεωρούμε το πρόβλημα

$$* \begin{cases} \Delta u = 0 & , \text{ στο } B(r) \\ u = g & , \text{ στο } \partial B(r) \end{cases} \qquad \text{όπου } g \in C(\partial B(r))$$

Ορισμός: Η συνάρτηση $P(x,y) = \dfrac{1}{n \alpha_n r} \dfrac{r^2 - |x|^2}{|x-y|^n}$ $\quad x \in B(r), y \in \partial B(r)$

$\hat{P}(x,y) = (r^2 - |x|^2) \cdot |x-y|^{-n}$

ονομάζεται πυρήνας του Poisson για την μπάλα $B(r)$

Πρόταση: Η λύση του $*$ δίνεται ως $u(x) = \int_{\partial B(r)} P(x,y) g(y) dS(y)$

Απόδειξη:

Βήμα 1: Για σταθερό y η P είναι αρμονική ως προς x. Έχουμε

$$\hat{P}_{x_i} = -2x_i |x-y|^{-n} - n|x-y|^{-n-2}(x_i - y_i)(r^2 - |x|^2)$$

$$\hat{P}_{x_i x_i} = -2|x-y|^{-n} + 4n|x-y|^{-n-2}(x_i - y_i)x_i + n(n+2)|x-y|^{-n-4}(x_i-y_i)^2(r^2-|x|^2) - n|x-y|^{-n-2}(r^2-|x|^2)$$

Άρα

$$\Delta \hat{P} = -2n|x-y|^{-n} + 4n|x-y|^{-n-2}(x-y)x + n(n+2)|x-y|^{-n-2}(r^2-|x|^2) - n^2|x-y|^{-n-2}(r^2-|x|^2) =$$

$$= 2n|x-y|^{-n-2}\left[-|x-y|^2 + 2(x-y)\cdot x + (r^2 - |x|^2)\right] = 2n|x-y|^{-n-2}\left[-|x|^2 - |y|^2 + 2x\cdot y + 2(x-y)\cdot x + |y|^2 - |x|^2\right]$$

$$= 0$$

Παραγωγίζουμε κάτω από το ολοκλήρωμα έχουμε

$$(\Delta u)(x) = \int_{\partial \Omega} \Delta_x P(x,y)\, g(y) dy = 0$$, άρα η u αρμονική στο Ω

Βήμα 2: Θα δείξουμε ότι $\forall\, x \in B(r)$ $\int_{\partial \Omega} P(x,y) dS(y) = 1$.

Έστω $w(x) = \int P(x,y) dS(y)$, τότε από το βήμα 1 η w είναι αρμονική στη $B(r)$

Έστω $x, x' \in B(r)$ τω $|x| = |x'|$. Υπάρχει στροφή T τω $x' = Tx$. Άρα

$$w(x') = \frac{1}{\sigma_n r} \int_{\partial B(r)} \frac{r^2 - |x'|^2}{|x' - y|^n} dS(y) = \frac{1}{\sigma_n r} \int_{\partial B(r)} \frac{r^2 - |x|^2}{|Tx - Tz|^n} dS(z) \Rightarrow \left(\begin{array}{ll} y = Tz & , z \in \partial B(r) \\ dS(y) = dS(z) & \end{array} \right)$$

$$w(x') = \frac{1}{\omega_n r}\int_{\partial B(r)} \frac{r^2-|x|^2}{|x-z|^n}\, dS(z) = w(x)$$

Άρα $w = $ σταθερή (Οι μόνες αρμονικές ομαλές αντινικές οι σταθερές)

Άρα $w(x) = w(0) = \frac{1}{\omega_n r}\int_{\partial B(r)} \frac{r^2}{r^n}\, dS(y) = 1$ (εμβαδό μοναδιαίας μπάλας)

Βήμα 3: Θα δείξουμε ότι $\forall\, x_0 \in \partial B(r)$ $\lim_{x\to x_0} u(x) = g(x_0)$

Έστω $\varepsilon > 0$, επειδή g συνεχής $\exists\, \delta_1 > 0$ τω

$|y-x_0| < \delta_1 \Rightarrow |g(y)-g(x_0)| < \varepsilon/2$. Έστω $A = \{y \in \partial B(r) : |y-x_0| < \delta_1\}$

Έστω $x \in B(r)$ τότε $|u(x)-g(x_0)| \overset{B2}{=} \left|\int_{\partial B(r)} P(x,y)(g(y)-g(x_0))\, dS(y)\right| \le$

$$\le \underbrace{\int_A P(x,y)|g(y)-g(x_0)|\, dS(y)}_{I_1} + \underbrace{\int_{\partial B(r)\setminus A} P(x,y)|g(y)-g(x_0)|\, dS(y)}_{I_2} = I_1 + I_2$$

$\le \varepsilon/2$ $\quad < \delta_1/2 \quad > \delta_1$

Έπουμε $I_1 < \varepsilon/2$

Υποθέτουμε ότι $|x-x_0| < \delta_1/2$ Άρα $|x-y| \ge \big||x-x_0| - |y-x_0|\big| > \delta_1/2$

Έστω $M = \max|g|$ Για $|x-x_0| < \delta_1/2$

$$I_2 = \frac{1}{\omega_n r}(r^2-|x|^2)\int_{A^c} \frac{|g(y)-g(x_0)|}{|x-y|^n}\, dS(y) \le \frac{1}{\omega_n r}(r^2-|x|^2)\left(\frac{\delta_1}{2}\right)^{-n} 2M\, n\, \alpha_n r^{n-1} =$$

$= C_{r,M,n}(|x_0|^2-|x|^2) < \varepsilon/2$ για x αρκετά κοντά στο x_0

Άρα $\lim_{x\to x_0} u(x) = g(x_0)$