ΣΕΙΡΕΣ FOURIER

Σημασία: (1) Επειδή κάποιοι τύποι ασυνεχών συναρτήσεων που δεν μπορούν ν' αναπτυχθούν σε δυναμοσειρά, αναπτύσσονται σε σειρά Fourier.

(2) Επειδή μια ευρεία κλάση προβλημάτων από τις εφαρμογές, αναφέρεται σε περιοδικά φαινόμενα.

1. ΚΑΤΑ ΤΜΗΜΑΤΑ ΣΥΝΕΧΕΙΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ

<u>ΟΡΣ 1</u>: η f λέγεται ΚΤΣ στο $[a,b]$ αν υπάρχουν πεπερασμένου πλήθους σημεία $a=x_1<x_2<\cdots<x_n=b$ τέτοια, ώστε η f να είναι συνεχής στα διαστήματα $x_j<x<x_{j+1}$ και τα όρια $f(x_j+)$ και $f(x_{j+1}-)$ να υπάρχουν για όλα τα $j=1,2,\ldots,n-1$.

<u>Υπενθύμιση</u> $f(x_0^-)=\lim\limits_{h\to 0} f(x_0-h)$, $f(x_0^+)=\lim\limits_{h\to 0} f(x_0+h)$

και αν f συνεχής στο x_0 : $f(x_0-)=f(x_0+)=f(x_0)$

<u>ΟΡΣ 2</u>: η f λέγεται κατά τμήματα λεία (ΚΤΛ) στο $[a,b]$ αν είναι ΚΤΣ στο $[a,b]$ και επιπλέον η f' είναι συνεχής σε κάθε (x_j, x_{j+1}) και υπάρχουν τα $f'(x_j+)$ και $f'(x_j-)$

<u>Υπενθύμιση</u> $f'(x_0^-)=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x_0-)-f(x_0-h)}{h}$, $f'(x_0+)=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x_0+h)-f(x_0+)}{h}$

2. ΑΡΤΙΕΣ ΚΑΙ ΠΕΡΙΤΤΕΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ

<u>ΟΡΣ 3.</u> Μια συνάρτηση f λέγεται

(i) ΑΡΤΙΑ (Α) αν $f(-x)=f(x) \quad \forall x$

(ii) ΠΕΡΙΤΤΗ (Π) αν $f(-x)=-f(x) \quad \forall x$

Δεν είναι όλες οι συναρτήσεις άρτιες ή περιττές, όμως κάθε συνάρτηση γράφεται ως άθροισμα μιας άρτιας και μιας περιττής

$$f(x)=\frac{1}{2}\{f(x)+f(-x)\}+\frac{1}{2}\{f(x)-f(-x)\} = A+\Pi$$

Ισχύουν οι παρακάτω σχέσεις

I. $A\cdot A = \Pi\cdot\Pi = A$

II. $A\cdot\Pi = \Pi\cdot A = \Pi$

III. $\displaystyle\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 2\int_{0}^{a} f(x)\,dx$ όταν f: άρτια

IV. $\displaystyle\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 0$ όταν f: περιττή

3. ΠΕΡΙΟΔΙΚΕΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ

Μια ΚΤΣ συναρτηση f σ' ενα διαστημα $[a,b]$ λεγεται περιοδικη (με περιοδο p), αν υπαρχει $p \in \mathbb{R}^+$:

$$f(x+p) = f(x)$$

Ισχυουν οτι:

(i) $f(x+np) = f(x) \quad , n \in \mathbb{N}$

(ii) Αν c_k: σταθερες και $f_1, \dots, f_k$ p-περιοδικες τοτε η $f = c_1 f_1 + \dots + c_k f_k$ ειναι p-περιοδικη.

4. ΣΕΙΡΕΣ FOURIER

Ξερουμε ηδη οτι οι συναρτησεις

$$1, \cos x, \sin x, \cos 2x, \sin 2x, \dots$$

ειναι μεταξυ τους ορθογωνιες στο $[-\pi, \pi]$ και γραμμικα ανεξαρτητες. Γραφουμε

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx)$$

οπου το "$\sim$" σημαινει ενα συσχετισμο των a_0, a_k, b_k με την f, κατα ενα μοναδικο τροπο.

Εστω οτι η f ειναι Riemann ολοκληρωσιμη στο $[-\pi, \pi]$.

Θετουμε $S_n(x) = \dfrac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} (a_k \cos kx + b_k \sin kx)$ και θα επιχειρησουμε να βρουμε τους συντελεστες a_0, a_k, b_k ετσι ωστε η $S_n(x)$ να παριστανει την καλυτερη προσεγγιση της $f(x)$ - με την εννοια των ελαχιστων τετραγωνων. Θελουμε δηλαδη να ελαχιστοποιησουμε το ολοκληρωμα

$$I(a_0, a_k, b_k) = \int_{-\pi}^{\pi} \{f(x) - S_n(x)\}^2 dx$$

$$\therefore \quad \frac{\partial I}{\partial a_0} = 0 \quad , \quad \frac{\partial I}{\partial a_k} = 0 \quad , \quad \frac{\partial I}{\partial b_k} = 0$$

Απο τις σχεσεις αυτες παιρνουμε οτι

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx$$

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos kx \, dx \quad , \quad b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin kx \, dx$$

Εστω οτι η f ειναι ΚΤΣ και 2π – περιοδικη.

Τοτε ισχυει η σχεση

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k^2 + b_k^2) \leq \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)\,dx$$

που ονομαζεται ΑΝΙΣΟΤΗΤΑ ΤΟΥ BESSEL.

Η σειρα Fourier συγκλινει μεσοτετραγωνικα προς την f(x) αν

$$\lim_{n\to\infty}\int_{-\pi}^{\pi}\left[f(x) - \left(\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n}(a_k\cos kx + b_k \sin kx)\right)\right]^2 dx = 0$$

Αν η σειρα Fourier συγκλινει μεσοτετραγωνικα προς την f(x) τοτε ισχυει η σχεση

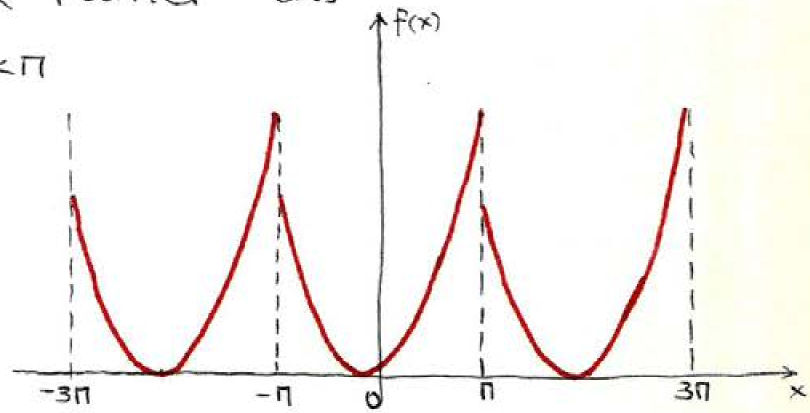
$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k^2 + b_k^2) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)\,dx$$

που λεγεται ΣΧΕΣΗ ΤΟΥ PARSEVAL.

5. ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ

(1) Να βρεθει η αναπτυξη σε σειρα Fourier της

$$f(x) = x + x^2 \quad , \ -\pi < x < \pi$$



Εδω εχουμε

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(x+x^2)\,dx$$

$$= 2\frac{\pi^2}{3}$$

$$a_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos kx\,dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(x+x^2)\cos kx\,dx = \frac{1}{\pi}\left\{\frac{x\sin kx}{k}\bigg|_{-\pi}^{\pi} - \int_{-\pi}^{\pi}\frac{\sin kx}{k}dx\right\}$$

$$+ \frac{1}{\pi}\left\{\frac{x^2\sin kx}{k}\bigg|_{-\pi}^{\pi} - \int_{-\pi}^{\pi}\frac{2x\sin kx}{k}dx\right\} = -\frac{2}{k\pi}\left\{-\frac{x\cos kx}{k}\bigg|_{-\pi}^{\pi} + \int_{-\pi}^{\pi}\frac{\cos kx}{k}dx\right\}$$

$$= \frac{4}{k^2}\cos k\pi = \frac{4}{k^2}(-1)^k \quad , \quad k = 1, 2, 3, \ldots$$

Ομοιως , $b_k = -\frac{2}{k}(-1)^k$, $k = 1, 2, 3, \ldots$

Συνεπως

$$f(x) = \frac{\pi^2}{3} + \sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{4}{k^2}(-1)^k\cos kx - \frac{2}{k}(-1)^k\sin kx\right)$$

(2) Να βρεθεί η ανάπτυξη σε σειρά Fourier της $f(x) = x \mid -\pi < x < \pi$ (F4

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x\,dx = 0$$

$$a_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos kx\,dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x\cos kx\,dx = 0$$

$$b_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin kx\,dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x\sin kx\,dx = \frac{2}{k}(-1)^{k+1}$$

Συνεπώς $$f(x) = 2\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}\frac{\sin kx}{k}$$

6. ΗΜΙΤΟΝΙΚΕΣ ΚΑΙ ΣΥΝΗΜΙΤΟΝΙΚΕΣ ΣΕΙΡΕΣ

Ξέρουμε πως η $\cos kx$ είναι άρτια συνάρτηση, ενώ η $\sin kx$ περιττή. Από τις ιδιότητες των άρτιων και περιττών συναρτήσεων έχουμε συνεπώς ότι για f άρτια η $f(x)\cos kx$ είναι άρτια και η $f(x)\sin kx$ περιττή και αντίστοιχα για f περιττή. Ανάλογα λοιπόν με το είδος της f έχουμε:

<u>f: Άρτια</u>

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos kx$$

$$a_k = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\cos kx\,dx$$

$k = 0, 1, 2, \ldots$

<u>f: Περιττή</u>

$$f(x) \sim \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin kx$$

$$b_k = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\sin kx\,dx$$

$k = 1, 2, \ldots$

Αν μια συνάρτηση ορίζεται μόνο στο $(-\pi, \pi)$ για να δουλέψουμε με σειρές Fourier, απλώς επεκτείνουμε τη συνάρτηση περιοδικά, με περίοδο 2π σ' όλο το $(-\infty, +\infty)$ (Π.χ. Σχήμα Παραδ. 5(1))

Αν μια συνάρτηση ορίζεται μόνο στο $(0, \pi)$ μπορούμε να την επεκτείνουμε στο $(-\pi, 0)$ με δύο τρόπους

<u>άρτια επέκταση</u>

$$F_A(x) := \begin{cases} f(x) & , 0 < x < \pi \\ f(-x) & , -\pi < x < 0 \end{cases}$$

<u>περιττή επέκταση</u>

$$F_\Pi(x) := \begin{cases} f(x) & , 0 < x < \pi \\ -f(-x) & , -\pi < x < 0 \end{cases}$$

και τα αντίστοιχα αναπτύγματα Fourier δίνονται όπως παραπάνω.

7. ΜΙΓΑΔΙΚΕΣ ΣΕΙΡΕΣ FOURIER

Απο τους γνωστους τυπους $\sin x = \frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}$, $\cos x = \frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}$

και με στοιχειωδεις υπολογισμους, μπορουμε να δουμε οτι το αναπτυγμα Fourier - σε μιγαδικη μορφη - ειναι

$$f(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ikx} \quad , \ -\pi < x < \pi$$

$$c_k = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-ikx}\, dx$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

$$f(x) = e^x \ | -\pi < x < \pi$$

$$c_k = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^x e^{-ikx}\, dx = \frac{(1+ik)(-1)^k}{\pi(1+k^2)} \sinh\pi$$

και η σειρα Fourier ειναι

$$f(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{(1+ik)(-1)^k}{\pi(1+k^2)} \sinh\pi \cdot e^{ikx}$$

8. ΑΛΛΑΓΗ ΔΙΑΣΤΗΜΑΤΟΣ

Αν η f οριζεται σ' ενα διαστημα $[a,b]$ αντι του $[-\pi,\pi]$. Εισαγοντας τη νεα μεταβλητη t μεσω του μετασχηματισμου

$$x = \frac{1}{2}(b+a) + \frac{b-a}{2\pi} t$$

το $a \le x \le b$ γινεται $-\pi \le t \le \pi$ κι' ετσι η

$F(t) := f\left(\frac{b+a}{2} + \frac{b-a}{2\pi} t\right)$ εχει περιοδο 2π , αρα για την F εχουμε τη γνωστη αναπτυξη σε σειρα Fourier. Μεταφεροντας την, ως προς x, στο $[a,b]$ παιρνουμε

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}\left[a_k \cos\frac{k\pi(2x-b-a)}{b-a} + b_k \sin\frac{k\pi(2x-b-a)}{b-a}\right]$$

οπου

$$a_k = \frac{2}{b-a}\int_a^b f(x)\cos\frac{k\pi(2x-b-a)}{b-a}\, dx$$

$$b_k = \frac{2}{b-a}\int_a^b f(x)\sin\frac{k\pi(2x-b-a)}{b-a}\, dx$$

Συχνα, χρειαζεται να δουλεψουμε σε διαστημα της μορφης $[-\ell,\ell]$. (F6)
Σ' αυτη την περιπτωση, οι προηγουμενες σχεσεις γινονται

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}\left(a_k \cos\frac{k\pi x}{\ell} + b_k \sin\frac{k\pi x}{\ell}\right)$$

οπου
$$a_k = \frac{1}{\ell}\int_{-\ell}^{\ell} f(x)\cos\frac{k\pi x}{\ell}\,dx$$

$$b_k = \frac{1}{\ell}\int_{-\ell}^{\ell} f(x)\sin\frac{k\pi x}{\ell}\,dx$$

Αν, τελος, η f ειναι 2ℓ-περιοδικη και αρτια/περιττη εχουμε

f: αρτια

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos\frac{k\pi x}{\ell}$$

$$a_k = \frac{2}{\ell}\int_0^{\ell} f(x)\cos\frac{k\pi x}{\ell}\,dx$$

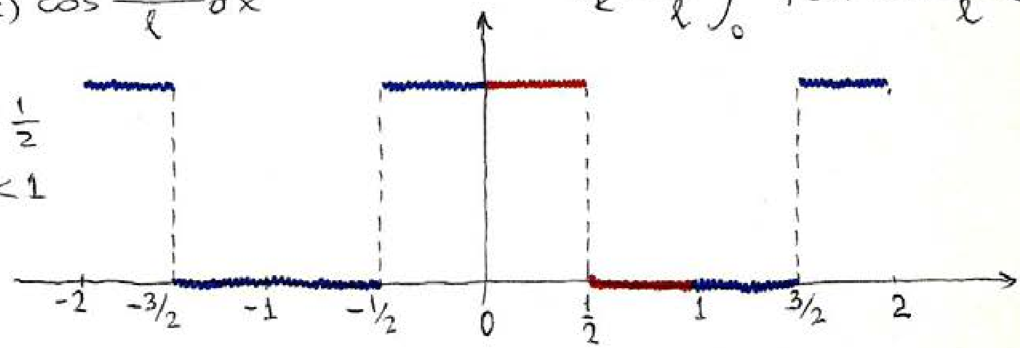
f: περιττη

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin\frac{k\pi x}{\ell}$$

$$b_k = \frac{2}{\ell}\int_0^{\ell} f(x)\sin\frac{k\pi x}{\ell}\,dx$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

$$f(x) = \begin{cases} 1, & 0 < x < \frac{1}{2} \\ 0, & \frac{1}{2} < x < 1 \end{cases}$$



Επεκτεινουμε την f οπως φαινεται στο παραπανω σχημα. Αφου η επεκταση ειναι αρτια, θα εχουμε $b_k = 0$ και - μια που $\ell = 1$ $(2\ell = 2)$ -

$$a_0 = \frac{2}{\ell}\int_0^{\ell} f(x)\,dx = \frac{2}{1}\int_0^{1} dx = 1$$

$$a_k = \frac{2}{\ell}\int_0^{\ell} f(x)\cos\frac{k\pi x}{\ell}\,dx = \frac{2}{1}\int_0^{1}\cos k\pi x\,dx = \frac{2}{k\pi}\sin\frac{k\pi}{2}$$

οποτε

$$f(x) = \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{2}{(2k-1)\pi}(-1)^{k-1}\cos(2k-1)\pi x$$

ΘΕΩΡΗΜΑ 1 (κατα σημειο συγκλιση)

Αν η $f(x)$ ειναι κατα τμηματα λεια και 2π-περιοδικη στο $[-\pi,\pi]$ τοτε για καθε x

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}(a_k\cos kx+b_k\sin kx)=\frac{1}{2}\{f(x+)+f(x-)\}$$

οπου

$$a_k=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos kx\,dx \quad ,\; b_k=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin kx\,dx \qquad \forall k.$$

Παρατηρησεις

1. Στα σημεια συνεχειας της f, ισχυει $f(x)=f(x-)=f(x+)$

2. Στην αποδειξη, εμφανιζεται ο τυπος του Dirichlet για το n-οστο μερικο αθροισμα S_n της σειρας:

$$S_n(x)=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(s+x)\,\frac{\sin(n+\frac{1}{2})s}{2\sin\frac{s}{2}}\,ds$$

Ο πυρηνας Dirichlet $\dfrac{\sin(n+\frac{1}{2})s}{2\sin\frac{s}{2}}$ ειναι 2π-περιοδικος και

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\sin(n+\frac{1}{2})s}{2\sin\frac{s}{2}}=1$$

3. Επισης στην αποδειξη χρησιμοποιειται το Λημμα Riemann-Lebesgue:
Αν η $g(x)$ ειναι κατα τμηματα συνεχης στο $[a,b]$ εχουμε

$$\lim_{\lambda\to\infty}\int_a^b g(x)\sin\lambda x\,dx=\lim_{\lambda\to\infty}\int_a^b g(x)\cos\lambda x\,dx=0$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

Εχουμε δει στο Παρ. 5(1), σελ. F3, οτι

$$x+x^2\sim\frac{\pi^2}{3}+\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{4}{k^2}(-1)^k\cos kx-\frac{2}{k}(-1)^k\sin kx\right)$$

και επειδη η $x+x^2$ ειναι κατα τμηματα λεια, στα σημεια συνεχειας το "~" μπορει να γινει "=". Στα σημεια ασυνεχειας θα ισχυει ο τυπος του Θ1. Το $x=\pi$ ειναι σημειο ασυνεχειας και ετσι:

$$\frac{1}{2}\left\{(\pi+\pi^2)+(-\pi+\pi^2)\right\}=\frac{\pi^2}{3}+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{4}{k^2}(-1)^k\cos k\pi$$

αφου $f(\pi-)=\pi+\pi^2$, $f(\pi+)=f(-\pi+)=-\pi+\pi^2$

Απλοποιωντας παιρνουμε οτι

$$\frac{\pi^2}{6}=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}$$

Μια ασθενεστερη μορφη του Θ1 ειναι η εξης:

Μια συναρτηση που ειναι περιοδικη, κατα τμηματα συνεχης και εχει πεπερασμενο πληθος μεγιστων και ελαχιστων στο $[-\pi, \pi]$, λεμε οτι ικανοποιει τις "συνθηκες Dirichlet".
Ισχυει οτι: Αν η f ικανοποιει τις συνθηκες Dirichlet, τοτε η σειρα Fourier της f συγκλινει στο $\frac{1}{2}\{f(x+) + f(x-)\}$.

10. ΟΜΑΛΗ ΣΥΓΚΛΙΣΗ ΣΕΙΡΩΝ FOURIER.

ΘΕΩΡΗΜΑ 2

Εστω $f(x)$ μια 2π-περιοδικη συνεχης συναρτηση και εστω οτι η $f'(x)$ ειναι κατα τμηματα συνεχης στο $[-\pi, \pi]$. Αν, επιπλεον, $f(-\pi) = f(\pi)$ τοτε η αναπτυξη της $f(x)$ σε σειρα Fourier ειναι ομαλα και απολυτως συγκλινουσα.

Παρατηρηση: Στην αποδειξη χρησιμοποιειται η ανισοτητα του Bessel.

ΘΕΩΡΗΜΑ 3

Εστω $f(x)$ μια 2π-περιοδικη, κατα τμηματα λεια συναρτηση του $[-\pi,\pi]$. Τοτε η σειρα Fourier της f συγκλινει ομαλα στην f σε καθε κλειστο διαστημα που δεν περιεχει ασυνεχειες.

Αυτη η συμπεριφορα, της "αποκλισης" -δηλαδη- του $S_n(x)$ απο την $f(x)$ σε καθε διαστημα που περιεχει ενα σημειο ασυνεχειας της f, ειναι γνωστη ως "φαινομενο Gibbs".

11. ΔΙΑΦΟΡΙΣΗ ΚΑΙ ΟΛΟΚΛΗΡΩΣΗ ΣΕΙΡΩΝ FOURIER

Εχουμε δει στο Παρ. 5(2), σελ. F4 οτι

$$x = 2\left[\sin x - \frac{\sin 2x}{2} + \frac{\sin 3x}{3} - \dots\right]$$

και η σειρα συγκλινει για καθε x.
Παραγωγιζοντας, φορμαλιστικα, τη σειρα εχουμε

$$2\left[\cos x - \cos 2x + \cos 3x - \dots\right]$$

που αποκλινει για καθε x.
Το προβλημα πηγαζει απ' το οτι η $f(x) = x$ ειναι ασυνεχης στα σημεια $\pm\pi, \pm 3\pi, \dots$ (αφου επεκταθει περιοδικα).
Το παρακατω Θεωρημα μας δινει συνθηκες κατω απο τις οποιες μπορουμε να παραγωγιζουμε μια σειρα Fourier.

ΘΕΩΡΗΜΑ 4

Εστω $f(x)$ συνεχης στο $[-\pi,\pi]$ με $f(-\pi)=f(\pi)$ και εστω οτι η $f'(x)$ ειναι κατα τμηματα λεια στο ιδιο διαστημα. Τοτε η σειρα Fourier της f' μπορει να βρεθει με ορο προς ορο παραγωγιση της σειρας Fourier της f, και η σειρα που ετσι προκυπτει συγκλινει κατα σημειο στην f'.

Η ορο προς ορο ολοκληρωση σειρων Fourier γινεται κατω απο γενικωτερες συνθηκες απ' οτι η ορο προς ορο παραγωγιση. Παρ' ολο που, ως γνωστο, για να εξασφαλιστει η συγκλιση μιας σειρας που εχει ολοκληρωθει ορο προς ορο, πρεπει η αρχικη σειρα να συγκλινει ομαλα, αυτη η συνθηκη δεν ειναι αναγκαια στην περιπτωση των σειρων Fourier. Σχετικα εχουμε το

ΘΕΩΡΗΜΑ 5

Εστω $f(x)$ 2π-περιοδικη και κατα τμηματα συνεχης στο $[-\pi,\pi]$. Τοτε η σειρα Fourier της $f(x)$

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}(a_k\cos kx+b_k\sin kx)$$

ασχετα με το αν συγκλινει ή οχι, μπορει να ολοκληρωθει ορο προς ορο αναμεσα σ' οποιαδηποτε ορια.

Για $-\pi\le x\le\pi$ ισχυει:

$$\int_{-\pi}^{x} f(\xi)\,d\xi=\frac{a_0}{2}(x+\pi)+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}\left[a_k\sin kx-b_k(\cos kx-\cos k\pi)\right]$$

ΘΕΩΡΗΜΑ 6 (Ρυθμός Σύγκλισης – Ομαλότητα της f)

Εστω f 2π-περιοδικη και $f\in C^m([-\pi,\pi])$. Τοτε για τους συντελεστές Fourier έχουμε τις εκτιμήσεις

$$|a_k|\le\frac{c}{k^m},\quad |b_k|\le\frac{c}{k^m},\quad k=1,2,\dots$$