Μάθημα 13ο   Ε8. Μερικές Διαφορικές Εξισώσεις Ι   Στρατής   28/5/2019

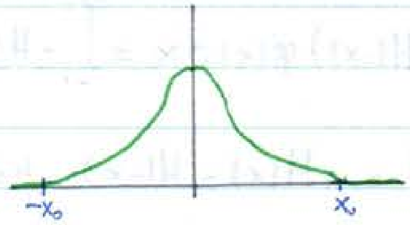
Κατανομές (ή Γενικευμένες Συναρτήσεις)

$C_c^\infty(\alpha,b)$: απεριόριστα παραγωγίσιμες συναρτήσεις με συμπαγή φορέα ($\text{supp}\,\varphi = \overline{\{x : \varphi(x) \neq 0\}}$)

$\downarrow$

συναρτήσεις δοκιμής

Παράδειγμα:
$$\varphi(x) = \begin{cases} e^{-\frac{x_0^2}{x_0^2-x^2}} & , |x| < x_0 \\ 0 & , |x| \geq x_0 \end{cases}$$



$f:(\alpha,\beta) \to \mathbb{R}$: τοπικά ολοκληρώσιμη στο (α,β), αν $\int_\alpha^\beta |f(x)|\,dx < \infty$ για κάθε $[c,d] \subset [\alpha,\beta]$

Ασθενείς παράγωγοι:

u: συνεχώς διαφορίσιμη στο (α,b), $u' = f$

πολλαπλασιάζω επί $\varphi \in C_c^\infty(\alpha,b)$ και ολοκληρώνω στο (α,b)

$$\int_\alpha^b u'(x)\varphi(x)\,dx = \int_\alpha^b f(x)\varphi(x)\,dx \implies$$
$$\| $$
$$u(x)\varphi(x)\Big|_\alpha^\beta - \int_\alpha^b u(x)\varphi'(x)\,dx$$
(με $u(x)\varphi(x)\Big|_\alpha^\beta = 0$)

$$\boxed{-\int_\alpha^b u(x)\varphi'(x)\,dx = \int_\alpha^\beta f(x)\varphi(x)\,dx \quad , \varphi \in C_c^\infty(\alpha,b)} \quad (*)$$

δεν είναι απαραίτητη η διαφορισιμότητα της u.

u, f: Τοπικά ολοκληρώσιμες στο (α,b), θα λέμε ότι η f είναι η ασθενής παράγωγος της u, αν ισχύει η $(*)$ $\forall\, \varphi \in C_c^\infty(\alpha,b)$

Παραδείγματα:

1 $(\alpha,b) = (-1,1)$, $f(x) = H(x) - H(-x)$

$H(x) := \begin{cases} 0 & , x < 0 \\ 1 & , x \geq 0 \end{cases}$ $u(x) = |x|$, δεν είναι κλασσικά παραγωγίσιμη για $x = 0$.

όμως $u' = f$ με την ασθενή έννοια στο $(-1,1)$

$$-\int_{-1}^{1} |x|\varphi'(x)\,dx = \int_{-1}^{1} (H(x)-H(-x))\varphi(x)\,dx \quad \forall \varphi \in C_c^\infty(-1,1)$$

$$\int_{-1}^{0} x\varphi'(x)dx - \int_{0}^{1} x\varphi'(x)\,dx = -\int_{-1}^{0}\varphi(x)dx + \int_{0}^{1}\varphi(x)\,dx$$

$$\int_{-1}^{1}(H(x)-H(-x))\varphi(x)\,dx = \int_{-1}^{0} -H(-x)\varphi(x)dx + \int_{0}^{1} H(x)\varphi(x)\,dx = -\int_{-1}^{0}\varphi(x)\,dx + \int_{0}^{1}\varphi(x)\,dx$$

$\frac{d}{dx}(|x|) = H(x) - H(-x)$ με την ασθενή έννοια

2 $(\alpha, b) = (-1,1)$

$u(x) = H(x)$

$u'(x) = ;$

Έστω $u' = f$ (τοπικά ολοκληρώσιμη) με την ασθενή έννοια:

$$-\int_{-1}^{1} H(x)\varphi'(x)\,dx = \int_{-1}^{1} f(x)\varphi(x)\,dx \quad \forall \varphi \in C_c^\infty(-1,1)$$

$$-\int_{0}^{1} H(x)\varphi'(x)\,dx = -\int_{0}^{1}\varphi'(x)dx = \varphi(0)$$

άρα πρέπει $\int_{-1}^{1} f(x)\varphi(x)dx = \varphi(0) \quad \forall \varphi \in C_c^\infty(-1,1)$

Έστω $\varphi_\alpha(x) := \begin{cases} e^{-\frac{\alpha^2}{\alpha^2-x^2}}, & |x|<\alpha<1 \\ 0, & \text{διαφορετικά} \end{cases}$

$$\frac{1}{e} = \varphi_\alpha(0) = \int_{-\alpha}^{\alpha} f(x)\cdot e^{-\frac{\alpha^2}{\alpha^2-x^2}}dx \le \frac{1}{e}\int_{-\alpha}^{\alpha}|f(x)|\,dx \xrightarrow{\alpha\to 0} 0. \Rightarrow \frac{1}{e} \le 0 \quad \text{Άτοπο.}$$

Ορισμός: Κατανομή (ή γενικευμένη συνάρτηση) f είναι μια απεικόνιση που σε κάθε συνάρτηση του C_c^∞ αντιστοιχεί έναν πραγματικό αριθμό (συναρτησοειδές). Το σύνολο των κατανομών θα το συμβολίζουμε $\mathcal{D}$

"κατ' αρχάς" $f : C_c^\infty(\alpha, b) \longrightarrow \mathbb{R}$ αντί $f(\varphi)$ θα γράφουμε (f, φ)

Γραμμικότητα

$$(f, \alpha\varphi) = \alpha(f,\varphi)$$

$$(f, \varphi_1+\varphi_2) = (f,\varphi_1) + (f,\varphi_2)$$

Ε8. Μερικές Διαφορικές Εξισώσεις Ι   Στρατής   28/5/2019

$\varphi_n \in C_c^\infty(\alpha,b)$ συγκλίνει στο 0 στον $C_c^\infty(\alpha,b) \overset{\text{ορσ}}{\Longleftrightarrow} \exists$ κλειστό και φραγμένο διάστημα $K \subset (\alpha,b)$: $\operatorname{supp}\varphi_n \subset K$, $n=1,2,\dots$ και $\varphi_n^{(m)} \to 0$ για $n\to\infty$ ομοιόμορφα στο K $(m=0,1,2,\dots)$ παράγωγοι

f συνεχής $\overset{\text{ορσ}}{\Longleftrightarrow} (f,\varphi_n) \to 0 \ \forall \{\varphi_n\}$ με $\varphi_n \to 0$ στο $C_c^\infty(\alpha,b)$

Παράδειγμα: u τοπικά ολοκληρώσιμη στο (α,b)

$$(u,\varphi) := \int_\alpha^b u(x)\varphi(x)\,dx \quad , \ \varphi \in C_c^\infty(\alpha,b)$$

↳ γραμμική + συνεχής

(Κάθε τοπικά ολοκληρώσιμη μπορεί να θεωρηθεί ως κατανομή)

Ορίζω τη κατανομή δ_ξ, $\xi \in (\alpha,b)$: $(\delta_\xi,\varphi) = \varphi(\xi)$, $\varphi \in C_c^\infty(\alpha,b)$.
Ονομάζεται κατανομή Dirac ή κατανομή δέλτα με πόλο στο ξ
γράφουμε $(\delta_\xi,\varphi) = \int_\alpha^b \delta_\xi(x)\varphi(x)\,dx = \varphi(\xi)$

δεν είναι ολοκλήρωμα, το βλέπουμε σαν σύμβολο

(Όσες δεν μπορούν να γραφούν έτσι με αυστηρή μαθηματική έννοια, αλλά τις γράφουμε "συμβολικά" έτσι, λέγονται ιδιόμορφες κατανομές).

Επιστροφή στην H

Για να υπάρχει ασθενώς η $H' = f$, πρέπει $\int_{-1}^1 H(x)\varphi(x)\,dx = \int_{-1}^1 f(x)\varphi(x)\,dx = \varphi(0), \forall \varphi \in C_c^\infty(\alpha,b)$
Είδαμε ότι δεν υπάρχει τοπικά ολοκληρώσιμη f.
Αν όμως $f = \delta_0$, "ερμηνεύοντας" το ολοκλήρωμα σαν σύμβολο με την έννοια των κατανομών $H' = \delta_0$

Ορίζω $\mathcal{D} = \mathcal{D}(\alpha,b) = C_c^\infty(\alpha,b)$: συναρτήσεις δοκιμής

$\mathcal{D}' = \mathcal{D}'(\alpha,b)$: Το σύνολο των συνεχών γραμμικών συναρτησοειδών στο $\mathcal{D}$

κατανομών.

Ορίζω.
- $f_1 = f_2$ στο $\mathcal{D}' \Leftrightarrow (f_1,\varphi) = (f_2,\varphi) \ \forall \varphi \in \mathcal{D}$
- $(f_1+f_2,\varphi) = (f_1,\varphi) + (f_2,\varphi)$
- $(c\cdot f,\varphi) = c\cdot(f,\varphi)$, $c \in \mathbb{R}$
- $(\xi\cdot f,\varphi) = (f,\xi\cdot\varphi)$, $\xi \in C^\infty(\alpha,b)$ ← Αν f τοπικά ολοκληρώσιμη τότε ισχύει προφανώς

Παράγωγος Κατανομής

Αν f, f' τοπικά ολοκληρώσιμες, το $(f',\varphi)=\int_\alpha^b f'(x)\varphi(x)dx = -\int_\alpha^b f(x)\varphi'(x)dx = -(f,\varphi')$

Για $f\in \mathcal{D}'$: $(f',\varphi) \overset{\text{ορσ}}{=} -(f,\varphi')$, $\varphi\in\mathcal{D}$

$(f^{(n)},\varphi) \overset{\text{ορσ}}{=} (-1)^n (f,\varphi^{(n)})$, $\varphi\in\mathcal{D}$

Παράδειγμα:

$(\delta_\xi',\varphi) = -(\delta_\xi,\varphi') = -\varphi'(\xi)$, $\varphi\in\mathcal{D}$

$f\in\mathcal{D}'(\mathbb{R}), \xi\in\mathbb{R}$. $f(x-\xi)\in\mathcal{D}'(\mathbb{R})$: $(f(x-\xi),\varphi(x)) = (f(x),\varphi(x+\xi))$, $\varphi\in\mathcal{D}$

- $\delta_\xi(x) = \delta(x-\xi)$
- $\int_{-\infty}^{\infty}\delta(x-\xi)dx = 1$ (μοναδιαίο εμβαδό)
- $\delta(x-\xi) = \delta(\xi-x)$ (άρτια)

Λύση ΣΔΕ με την έννοια των κατανομών

$Lu := pu'' + qu' + ru$, $p,q,r\in C^\infty(\alpha,b)$

(1) Η u λέγεται κλασσική λύση της $Lu=f$, $f\in C(\alpha,b)$ αν $u\in C^2(\alpha,b)$:
$Lu(x) = f(x) \quad \forall\, x\in(\alpha,b)$

(2) u λύση με την έννοια των κατανομών της $Lu=f$, $f\in\mathcal{D}'$, $u\in\mathcal{D}'$, $Lu\in\mathcal{D}'$
$Lu=f$ ως κατανομές $\Leftrightarrow (Lu,\varphi)=(f,\varphi) \;\forall\, \varphi\in\mathcal{D}$

Κλασσική λύση $\overset{\Rightarrow}{\not\Leftarrow}$ λύση με την έννοια των κατανομών

Θεμελιώδης λύση που αντιστοιχεί στον τελεστή L

$Lu = \delta$ (όχι μοναδική)

$(Lu,\varphi) = (pu'',\varphi)+(qu',\varphi)+(ru,\varphi) = (u'',p\varphi)+(u',q\varphi)+(u,r\varphi) = (u,(p\varphi)'') - (u,(q\varphi)') + (u,r\varphi) =$
$=(u,(p\varphi)''-(q\varphi)'+r\varphi) = (u,L^*\varphi)$, όπου $L^*\varphi := (p\varphi)''-(q\varphi)'+r\varphi$, "τυπικά συζυγής του L"

$Lu=f \xrightarrow{\text{με την έννοια των κατανομών}} (u,L^*\varphi)=(f,\varphi)\;\forall\,\varphi\in\mathcal{D}$

- Αν u,f τοπικά ολοκληρώσιμες, τότε $\int_\alpha^b u(x)L^*\varphi(x)dx = \int_\alpha^b f(x)\varphi(x)dx \quad \forall\,\varphi\in C_c^\infty(\alpha,b)$

Τυπικά αυτοσυζυγής: $L^*=L$

Παράδειγμα: $Au := -(pu')'+Qu$ (Sturm-Liouville)