Μάθημα 4ο Ε8. Μερικές Διαφορικές Εξισώσεις Ι Στρατής 12/3/2019

Λύση d' Alembert

$$u(x,t) = \frac{1}{2}\left[g(x+ct) + g(x-ct)\right] + \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} h(y)\,dy \qquad (dA)$$

Θεώρημα: Έστω $g \in C^2(\mathbb{R})$, $h \in C^1(\mathbb{R})$ και u που δίνεται από την (dA) τότε:

(i) $u \in C^2(\mathbb{R} \times [0,\infty))$

(ii) ικανοποιείται η σχέση $u_{tt} - c^2 \cdot u_{xx} = 0$ στο $\mathbb{R} \times (0,\infty)$

(iii) ισχύουν τα εξής:

$$\lim_{\substack{(x,t)\to(x_0,0)\\ t>0}} u(x,t) = g(x_0) \quad \& \quad \lim_{\substack{(x,t)\to(x_0,0)\\ t>0}} u_t(x,t) = h(x_0)$$

Παρατηρήσεις

1) "Υψηλότερη" ομαλότητα $(k>2)$

Ερώτημα, αν $g \in C^k$ και $h \in C^{k-1} \overset{?}{\Longrightarrow} u \in C^k$

Η απάντηση είναι ΝΑΙ, όχι όμως υψηλότερης ομαλότητας (π.χ C^{k+1})

Η κυματική εξίσωση (σε αντίθεση με την εξίσωση θερμότητας), ΔΕΝ προκαλεί άμεση (στιγμιαία) ομαλοποίηση (C^∞) των δεδομένων

2) Το π.α.τ. στο άνω ημιεπίπεδο είναι καλώς τοποθετημένο (Hadamard)

- Ύπαρξη λύσης
- Μοναδικότητα λύσης
- Συνεχής εξάρτηση από τα αρχικά δεδομένα

Έστω
$$\begin{cases} u_{tt} - c^2 u_{xx} = f(x,t), & x \in \mathbb{R},\ t>0 \\ u(x,0) = g(x) & \\ u_t(x,0) = h(x) & \end{cases} \Big\} x \in \mathbb{R}$$

Έστω u_1, u_2 λύσεις (με τις ίδιες f, g, h αντιστοίχως) και $w = u_1 - u_2$

Η w ικανοποιεί το π.α.τ.

$$\begin{cases} w_{tt} - c^2 w_{xx} = 0, & x \in \mathbb{R},\ t>0 \\ w(x,0) = 0 & \\ w_t(x,0) = 0 & \end{cases} \Big\} x \in \mathbb{R} \qquad (W)$$

Υποθέτω ότι g και h έχουν συμπαγή φορέα $[supp(g)=\{y\in Y: g(y)\neq 0\}]$ $\Rightarrow E(t)=E(0)=$ σταθερό

$$\begin{cases} u_{tt}-c^2u_{xx}=0 & x\in\mathbb{R}, t>0 \\ u(x,0)=g(x) & \\ u_t(x,0)=h(x) & \end{cases} \quad x\in\mathbb{R}$$

Ορίζω Ενέργεια $E(t):=\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}}(u_t^2+c^2u_x^2)\,dx$, παραγωγίζοντας προκύπτει ότι είναι σταθερή

Κινητική Ενέργεια: $K(t):=\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}}u_t^2\,dx$, Δυναμική Ενέργεια $P(t):=\frac{c^2}{2}\int_{\mathbb{R}}u_x^2\,dx$

$$K'(t)=\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}}2u_tu_{tt}\,dx=\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}}2u_t\cdot c^2u_{xx}\,dx=\underbrace{c^2u_t\cdot u_x\Big|_{-\infty}^{\infty}}_{\to 0\text{, λόγω της υπόθεσης των φορέων}}-\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}}2c^2u_{xt}u_x\,dx$$

$$=-\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}}c^2(u_x^2)_t\,dx=-\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}}c^2u_x^2\,dx\right)=-P'(t)$$

$\Rightarrow K'+P'=0 \Rightarrow E'=0 \Rightarrow E$ σταθερή

Στο Π.Α.Τ (w) ισχύει $E_w(t)=E_w(0)$

$$E_w(t)=\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}}(\cancel{w_t^2(x,0)}^{0}+c^2\cancel{w_x^2(x,0)}^{0})\,dx=0 \Rightarrow w_t=0\ \&\ w_x=0 \Longrightarrow w:\text{ σταθερή}$$

$\Rightarrow w=0 \Rightarrow u_1=u_2$

(Άρα τη μοναδικότητα την δείχνουμε, $E(t)=\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}}u_t^2\,dx+\frac{c^2}{2}\int_{\mathbb{R}}u_x^2\,dx=$ σταθ
αν $supp(g)$, $supp(h)$: συμπαγής)

Για τη συνεχή εξάρτηση

Αν $\forall\ \varepsilon>0$ και για κάθε "χρονικό" διάστημα $0\le t\le T$, υπάρχει
$\delta=\delta(\varepsilon,T): |u_1(x,t)-u_2(x,t)|<\varepsilon$ όταν $|g_1(x)-g_2(x)|<\delta$ και $|h_1(x)-h_2(x)|<\delta$.

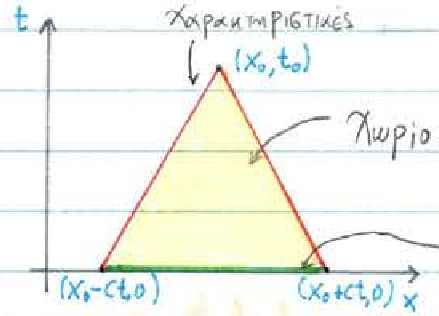
$$\begin{aligned}(u_j)_{tt}-c^2(u_j)_{xx}&=0\\ u_j(x,0)&=g_j(x) \qquad j=1,2\\ (u_j)_t(x,0)&=h_j(x)\end{aligned}$$

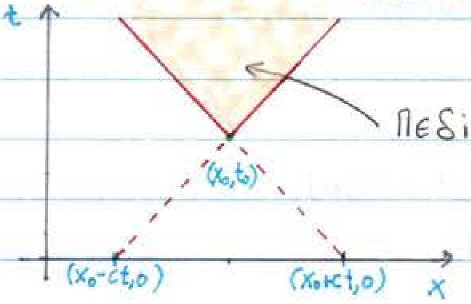
Ε8. Μερικές Διαφορικές Εξισώσεις Ι   Στρατής   12/3/2019

Ιδιότητες

1) Αν πάμε στον τύπο (dA) και βάλουμε $-t$ στη θέση του t, δεν αλλάζει τίποτα. (Αυτό λέγεται χρονική αντιστρεψιμότητα)

2)



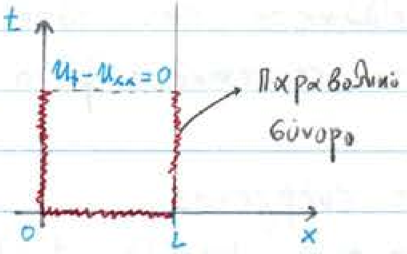


Η αρχική μετατόπιση διαδίδεται με ταχύτητα $= c$

Η αρχική ταχύτητα διαδίδεται με ταχύτητα $\leq c$

Αρχή Μεγίστου

$\Delta u = 0$



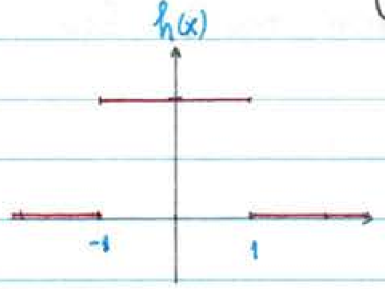
Το μέγιστο και το ελάχιστο πετυχένεται στο σύνορο.

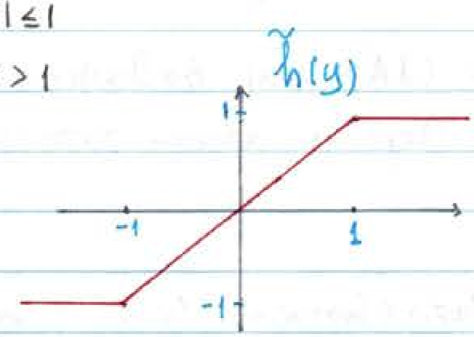
Στη κυμματική εξίσωση δεν έχω "αρχή μεγίστου"

Παραδείγματα: Ότι δεν υπάρχει αρχή μεγίστου στη κυμματική εξίσωση

1) Έχω το $\begin{cases} u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0, & x \in \mathbb{R}, t>0 \\ u(x,0) = g(x) \\ u_t(x,0) = h(x) \end{cases}$, $g(x)=0$ και $h(x) = \begin{cases} 1, & |x| \leq 1 \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases}$.

$$\Rightarrow \tilde{h}(y) = \int_0^x h(y)\,dy = \begin{cases} -1, & x<-1 \\ x, & |x|\le 1 \\ 1, & x>1 \end{cases}$$

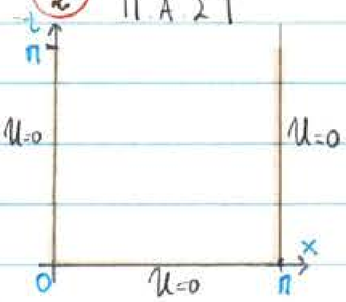




$$\rightsquigarrow u(x,t) = \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} h(y)\,dy \neq 0 \quad \forall\, t>0,$$

άρα δεν έχουμε το μέγιστο και το ελάχιστο στο σύνορο

(2) Π.Α.Σ.Τ



$$\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} = 0 & x\in(0,\pi),\ t\in(0,\pi) \\ u(0,t) = u(\pi,t) = 0 & t\in[0,\pi] \\ u(x,0) = 0 & \\ u_t(x,0) = \sin x & \end{cases} \quad x\in[0,\pi]$$

Η λύση αυτού του προβλήματος $u(x,t) = \sin x\,\sin t$ (μηδενίζεται στο σύνορο) όμως αν ψάξω το μέγιστο και το ελάχιστο της τότε η μέγιστη τιμή της $u(x,t) = 1$ και λαμβάνεται στο εσωτερικό σημείο $\left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$

(3) Ασυμπτωτική ισοκατανομή της ενέργειας
(Δηλαδή $K(t) = P(t)$ για επαρκώς μεγάλο t)

$$u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0, \quad x\in\mathbb{R},\ t>0$$

$$\left.\begin{aligned} u(x,0) &= g(x) \\ u_t(x,0) &= h(x) \end{aligned}\right\} x\in\mathbb{R}$$

$\mathrm{Supp}(g), \mathrm{Supp}(h) \subset [A,B] \Rightarrow E(t) = E(0) =$ σταθερά

(έχουν συμπαγή φορέα)

(Ισχύει και για $x\in\mathbb{R}^n$: όπου n περιττός)

$$\frac{d}{dy}\left(\int_{\alpha(y)}^{b(y)} F(y,z)\,dz\right) = F(y,b(y))\,b'(y) - F(y,\alpha(y))\,\alpha'(y) + \int_{\alpha(y)}^{b(y)} \frac{\partial F(y,z)}{\partial y}\,dz$$

Τύπος του Leibniz

Ε8. Μερικές Διαφορικές Εξισώσεις Ι   Στρατής   12/3/2019

Παραγωγίζουμε την (dA) και θα πάρουμε

$$u_t(x,t) = \frac{c}{2}\left[g'(x+ct) - g'(x-ct)\right] + \frac{1}{2c}\left[h(x+ct) + h(x-ct)\right]$$
$$u_x(x,t) = \frac{1}{2}\left[g'(x+ct) + g'(x-ct)\right] + \frac{1}{2c}\left[h(x+ct) - h(x-ct)\right]$$

και φτιάχνουμε τη διαφορά $u_t^2 - c^2 u_x^2 = \ldots = 0$

Μπορώ πάντα να πετύχω το σχήμα αυτό αν διαλέξω μεγάλο t άρα το επαρκώς μεγάλο t είναι $t > \frac{B-A}{2c}$, $x \in \mathbb{R}$

Ασκήσεις

① $u_{tt} - \Delta u + m^2 u = 0$ (εξίσωση Klein-Gordon), $x \in \mathbb{R}^3$, $t \in \mathbb{R}$ $m>0$ σταθερά

ορίζω

$$E(t) = \int_{\mathbb{R}^3} \left\{ \frac{1}{2}(u_t(x,t))^2 + \frac{1}{2}|\nabla u(x,t)|^2 + \frac{m^2}{2}(u(x,t))^2 \right\} dx$$

Να δειχθεί ότι

- Διατήρηση Ενέργειας
- Αν έχω την KG και το ΠΑΤ: $\begin{cases} KG \\ u(x,0) = g(x) \\ u_t(x,0) = h(x) \end{cases}$ έχει μοναδική λύση

② $u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0$, $\mathbb{R}^+ \times (0,\infty)$ g, h επαρκώς ομαλές που μηδενίζονται και στο $x=0$

$$\left.\begin{matrix} u = g \\ u_t = h \end{matrix}\right| \mathbb{R}^+ \times (0,\infty)$$

$u_t = \alpha u_x$ $\{x=0\} \times (0,\infty)$ $\alpha \neq -c$

- Να λυθεί
- Τι γίνεται αν $\alpha + c = 0$;

Υπόδειξη: Η γενική λύση $u(x,t) = F(x+ct) + G(x-ct)$. Θα πρέπει να βρω F, G αλλά να βρω τι γίνεται όταν πάω στα αρνητικά.

③ Αν έχω κυματική εξίσωση και ψάχνουμε λύσης της μορφής $u(x,t) = e^{i(kx+wt)}$

θα πρέπει $w^2 = -c^2k^2 \rightarrow$ $w = \pm kc$ σχέση διασποράς $e^{\pm ikct} \cdot e^{ikx}$