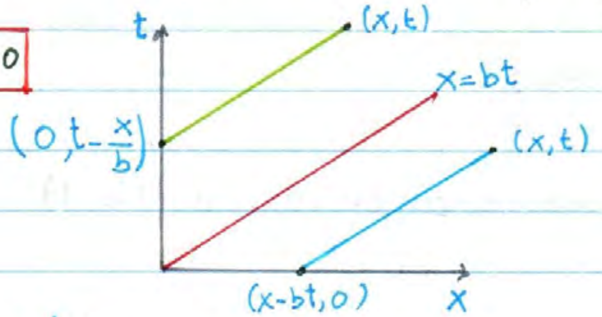
Μάθημα 3º Ε8. Μερικές Διαφορικές Εξισώσεις Ι Στράτης 5/3/2019

Πρόβλημα Αρχικών Συνοριακών Τιμών

$$\begin{cases} u_t + b\cdot u_x, & x>0,\ t>0 \\ u(x,0) = g(x), & x\geq 0 \\ u(0,t) = h(t), & t\geq 0 \end{cases}$$

Η λύση διαφοροποιείται ανάλογα με το πρόσημο του b.

$\boxed{b>0}$



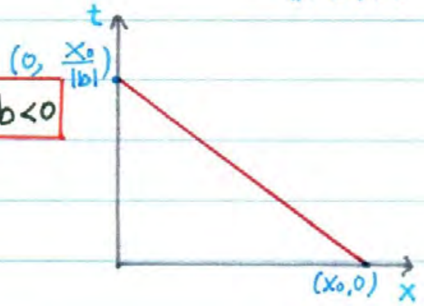
Αν $x>bt$: $u(x,t) = g(x-bt)$

$x<bt$: $u(x,t) = u(0,t-\frac{x}{b}) = h(t-x/b)$

$x=bt$: $u(x,t)$: $g(0)=h(0)$

(συνθήκη συνέχειας)

$\boxed{b<0}$



$x_0>0$: αυθαίρετο

$g(x_0) = u(x_0,0) = u(0,\frac{x_0}{|b|}) = h(\frac{x_0}{|b|})$

Αναγκαστικά θα πρέπει να ισχύει: $g(x) = h(\frac{x}{|b|})$

Το πρόβλημα λοιπόν έχει λύση μόνο αν ισχύει η σχέση
Άρα γενικά δεν έχει λύση

Εξίσωση μεταφοράς

$u: \mathbb{R}^n\times[0,\infty)\to\mathbb{R}$ $u(x,t)$

$b\in\mathbb{R}^n$: σταθερό διάνυσμα

$Du = D_x u = \text{grad}\,u = \text{grad}_x u = (u_{x_1}, u_{x_2}, \dots, u_{x_n})$ ως προς x.

$$\boxed{u_t + b\cdot Du = 0, \quad x\in\mathbb{R}^n \quad t>0} \quad (\text{ΕΜ})$$

Θα πάρουμε $(x,t)\in\mathbb{R}^n\times(0,\infty)$ το σταθεροποιώ και ορίζω

$z(s) : u(x+sb, t+s)$, $s\in\mathbb{R}$

$z'(s) := Du(x+sb,t+s)\cdot b + u_t(x+sb,t+s) \overset{(\text{ΕΜ})}{=} 0 \Rightarrow z(\cdot)$ σταθερή ως προς s

$\Rightarrow$ Για κάθε (x,t) η $u(x,t)$ σταθερή επί της ευθείας που διέρχεται από το (x,t)

και έχει διεύθυνση $(b,1) \in \mathbb{R}^{n+1}$

Π.α.Τ ομογενές

- (ΕΜ) στο $\mathbb{R}^n \times (0,\infty)$
- $u = g$ στο $\mathbb{R}^n \times \{t=0\}$, $g: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} : C^1$

Λύση: $u(x,t) = g(x-bt)$, $x \in \mathbb{R}$, $t>0$

Π.α.Τ Μη ομογενές

- $u_t + b \cdot Du = f$ στο $\mathbb{R}^n \times (0,\infty)$
- $u = g$ στο $\mathbb{R}^n \times \{t=0\}$: $g: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} : C^1$

Λύση: $u(x,t) = g(x-bt) + \int_0^t f(x+(s,t)b, s)\,ds$

Πάμε να βρούμε τη λύση του ομογενούς

Η ευθεία που διέρχεται από το (x,t) και έχει διεύθυνση $(b,1)$ αναπαρίσταται παραμετρικά ως:

$(x+sb,\ t+s)$, $s \in \mathbb{R}$

και τέμνει το επίπεδο $\Gamma := \mathbb{R}^n \times \{t=0\}$

όταν $s=-t$, στο σημείο $(x-tb, 0)$

άρα $u(x,t) = u(x-tb, 0) = g(x-bt)$

Για το μη ομογενές

Ορίζω $z(s) : u(x+sb, t+s)$, $s \in \mathbb{R} \Rightarrow$

$z'(s) = Du(x+sb, t+s) \cdot b + u_t(x+sb, t+s) = f(x+sb, t+s)$

$z(-t) = u(x-tb, 0) = g(x-tb)$

$$u(x,t) - g(x-tb) = z(0) - z(-t) = \int_{-t}^{0} z'(s)\,ds = \int_{-t}^{0} f(x+sb, t+s)\,ds = \int_0^t f(x+(s-t)b, s)\,ds$$

Άρα η λύση $u(x,t) = g(x-bt) + \int_0^t f(x+(s-t)b, s)\,ds$

Συμβολισμός:

$u(x,t)$

$$\Delta u = \sum_{i=1}^{n} u_{x_i x_i}$$

$$\Box u = u_{tt} - \Delta u$$

ΕΒ. Μερικές Διαφορικές Εξισώσεις Ι   Στρατής   5/3/2019

Κυματική Εξίσωση

$\boxed{n=1}$ $u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0$, $x \in \mathbb{R}$, $t>0$, $c>0$ σταθερό (Υπερβολικού τύπου)

Θα τη λύσουμε με 2 τρόπους

1 "Παραγοντοποίηση"

Κάνουμε την εξής παρατήρηση

$$0 = u_{tt} - c^2 u_{xx} = \frac{\partial^2}{\partial t^2}u - c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \left(\frac{\partial}{\partial t} + c\frac{\partial}{\partial x}\right)\underbrace{\left(\frac{\partial}{\partial t} - c\frac{\partial}{\partial x}\right)u}_{v}$$

Αν θέσουμε $v = \left(\frac{\partial}{\partial t} - c\frac{\partial}{\partial x}\right)u$ (ξέρουμε να το λύνουμε)

Τότε $v_t + c v_x = 0$
$v(x,0) : \alpha(x)$, $\alpha(x)$ αυθαίρετη $\xrightarrow{\text{εξίσωση μεταφοράς}}$ $v(x,t) = \alpha(x-ct)$

μετά θα πρέπει $u_t - c u_x = \alpha(x-ct)$
$u(x,0) := b(x)$, αυθαίρετη $\xrightarrow{\text{μη ομογενής εξίσωση μεταφοράς}}$

$$\Rightarrow u(x,t) = b(x+ct) + \int_0^t \alpha(x + c\cdot(t-s) - s)\, ds$$

Θα κάνω την εξής αλλαγή μεταβλητής

$x + ct - 2\cdot s = y$

s	y
0	$x+ct$
t	$x-ct$

$$\Rightarrow u(x,t) = b(x+ct) + \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} \alpha(y)\, dy$$

Βρήκαμε $u(x,t) = b(x+ct) + \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} \alpha(y)\,dy$, όπου α, b αυθαίρετες συναρτήσεις. (με επαρκή ομαλότητα)

Παρατήρηση: Αν είχαμε

$W_t + c\cdot W_x = 0 \longrightarrow P(x-ct)$ Αυτές οι συναρτήσεις θα

$W_t - c\cdot W_x = 0$ $\quad Q(x+ct)$ είναι λύσεις.

(2) Μέθοδος Χαρακτηριστικών

Κάνουμε τη μετατροπή σε κανονική μορφή

$\xi = \xi(x,t)$, $\eta = \eta(x,t)$, $\xi, \eta \in C^2$

$$J = \begin{vmatrix} \xi_x & \xi_t \\ \eta_x & \eta_t \end{vmatrix} \neq 0$$

$$\left.\begin{aligned} &u_x = u_\xi \xi_x + u_\eta \eta_x \ , \quad u_t = u_\xi \xi_t + u_\eta \eta_t \\ &u_{xx} = u_{\xi\xi} \xi_x^2 + 2 u_{\xi\eta} \xi_x \eta_x + u_{\eta\eta} \eta_x^2 + u_\xi \xi_{xx} + u_\eta \eta_{xx} \\ &u_{tt} = u_{\xi\xi} \xi_t^2 + 2 u_{\xi\eta} \xi_t \eta_t + u_{\eta\eta} \eta_t^2 + u_\xi \xi_{tt} + u_\eta \eta_{tt} \end{aligned}\right\} \Longrightarrow$$

$$u_{\xi\xi}(\underbrace{\xi_t^2 - c^2 \xi_x}_{\xi_t^2 = c^2 \xi_x}) + u_{\eta\eta}(\underbrace{\eta_t^2 - c^2 \eta_x}_{\xi(\xi,\eta)}) + u_{\xi\eta}(\xi_t \ \eta_t) + u_\xi(\xi_{tt} \ \xi_{xx}) + u_\eta(\eta_{tt} \ \eta_{xx}) = 0$$

Καμπύλη: ξ: σταθερά $\Rightarrow d\xi = 0 \Rightarrow \xi_x \dfrac{dx}{dt} + \xi_t = 0 \Rightarrow \dfrac{dx}{dt} = -\dfrac{\xi_t}{\xi_x}$

$x - ct$: σταθερά

$$\Rightarrow \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 = c^2 \Rightarrow \frac{dx}{dt} = \pm c \Rightarrow x + ct$$

Παίρνω $\boxed{\begin{aligned} \xi &= x - ct \\ \eta &= x + ct \end{aligned}}$ Μετασχηματισμός του Γαλιλαίου $\Rightarrow u_{tt} - c^2 u_{xx} = -4c^2 u_{\xi\eta} \Rightarrow \boxed{u_{\xi\eta} = 0}$

Κανονική Μορφή

Ολοκληρώνω τη κανονική μορφή ως προς η και μετά ως προς ξ

$u(\xi,\eta) = P(\xi) + Q(\eta)$: Γενική λύση στο νέο σύστημα συντεταγμένων.

στο παλιό θα είναι $\Rightarrow u(x,t) = P(x-ct) + Q(x+ct)$, P, Q αυθαίρετες : C^2

προς δεξιά

Κύμα που "οδεύει" με ταχύτητα c

προς αριστερά

Πρόβλημα αρχικών τιμών

$$\begin{cases} u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0 & , x \in \mathbb{R} , t > 0 , c > 0 : \text{σταθερό} \\ \left.\begin{aligned} u(x,0) &= g(x) \\ u_t(x,0) &= h(x) \end{aligned}\right\} x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

Λύση d'Alembert

$$u(x,t) = \frac{1}{2}\left[g(x+ct) + g(x-ct)\right] + \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} h(y)\,dy$$

Απόδειξη: (με τη πρώτη μέθοδο)

Έχουμε βρει τον τύπο $u(x,t) = b(x+ct) + \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} \alpha(y)\,dy$

και $b(x) = u(x,0) = g(x)$, $\alpha(x) = v(x,0)$

$\alpha(x) = u_t(x,0) = c\, u_x(x,0) = h(x) - c\cdot g'(x)$

$\Rightarrow$

$$u(x,t) = g(x+ct) + \frac{1}{2}\int_{x-ct}^{x+ct} (h(y) - cg'(y))\,dy$$

$$= \frac{1}{2}\left[g(x+ct) + g(x-ct)\right] + \frac{1}{2}\int_{x-ct}^{x+ct} h(y)\,dy$$