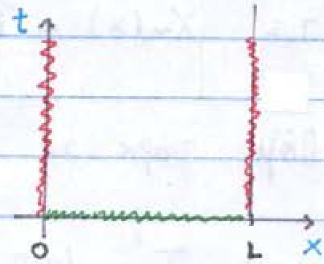
Μάθημα 2ο   Ε.Β. Μερικές Διαφορικές Εξισώσεις Ι   Στρατής   26/2/2019

Παράδειγμα: Έστω το Πρόβλημα Αρχικών Συνοριακών Τιμών



$u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0 \quad , x \in (0,L) \quad , t > 0 \qquad c > 0$: σταθερά

$u(x,0) = \varphi(x)$ φ, ψ : επαρκώς ομαλές
$u_t(x,0) = \psi(x)$ $x \in [0,L]$ } αρχικές συνθήκες

$u(0,t) = u(L,t) = 0 \quad t \geq 0$ Συνοριακές συνθήκες Dirichlet

$$\boxed{u(x,t) = X(x) \cdot T(t)}$$

λ: διαχωριστική σταθερά

$$\begin{cases} X'' + \lambda X = 0 \\ X(0) = X(L) = 0 \end{cases}$$
← Ένα πρόβλημα Sturm-Liouville
Ιδιοτιμές & Ιδιοσυναρτήσεις

$$T'' + \lambda c^2 T = 0$$

Πάμε να λύσουμε το πρόβλημα Sturm-Liouville

(i) $\lambda = 0 \implies X'' = 0 \implies X(x) = Ax + B$ εφαρμόζω τις συνθήκες

$$\left.\begin{array}{l} 0 = X(0) = B \\ 0 = X(L) = AL \overset{L \neq 0}{\implies} A = 0 \end{array}\right\} \implies X(x) \equiv 0$$
δεν μας κάνει αφού δεν ψάχνουμε την τετριμμένη

(ii) $\lambda < 0$: $\lambda = -\gamma^2$ (για ευκολία)

$$X'' - \gamma^2 X = 0 \implies X(x) = A \cdot e^{\gamma x} + B e^{-\gamma x}$$

$$\left.\begin{array}{l} 0 = X(0) = A + B \\ 0 = X(L) = Ae^{\gamma L} + Be^{-\gamma L} \end{array}\right\} \implies A = B = 0 \implies X(x) \equiv 0 \quad (\text{ότι με πριν})$$

(iii) $\lambda > 0$: $\lambda = \beta^2$

$$X'' + \beta^2 X = 0 \implies X(x) = A \cdot \cos(\beta \cdot x) + B \sin(\beta \cdot x)$$

$0 = X(0) = A$

$0 = X(L) = B \cdot \sin(\beta \cdot L)$ <

$B = 0 \implies X(x) \equiv 0$ (ότι με πριν)

$\sin(\beta \cdot L) = 0 \implies \beta \cdot L = n \cdot \pi \implies \beta_n = \dfrac{n \cdot \pi}{L} \quad , n = 1, 2, \dots$

①

άρα έχουμε λύσεις για $\boxed{\lambda_n = \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 \quad , n=1,2,\dots}$

τις $\boxed{X_n(x) = B_n \cdot \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \quad n=1,2,\dots}$

Πάμε τώρα να λύσουμε το $T'' + \lambda c^2 \cdot T = 0$ για τα λ_n που βρήκαμε

$$\Rightarrow T_n'' + \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 \cdot c^2 T_n = 0 \quad n=1,2,\dots \Rightarrow \boxed{T_n(t) = C_n \cdot \cos\left(\frac{n\pi c}{L}t\right) + D_n \cdot \sin\left(\frac{n\pi c}{L}t\right)}$$

Ας ορίσουμε $u_n(x,t) = X_n(x) \cdot T_n(t)$ τα οποία είναι λύσεις

άρα είναι λύση και το

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \left[\tilde{A}_n \cdot \cos\left(\frac{n\pi c}{L}t\right) + \tilde{B}_n \cdot \sin\left(\frac{n\pi c}{L}t\right) \right] \cdot \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \right\}$$

Για να υπολογίσουμε τα $\tilde{A}_n, \tilde{B}_n$

$$\varphi(x) = u(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{A}_n \cdot \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)$$

Παραγωγίζω ως προς t $\Rightarrow u_t(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \frac{n\pi c}{L} \left[\tilde{B}_n \cdot \cos\left(\frac{n\pi c}{L}t\right) - \tilde{A}_n \cdot \sin\left(\frac{n\pi c}{L}t\right) \right] \cdot \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \right\}$

$$\psi(x) = u_t(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{n\pi c}{L} \tilde{B}_n \cdot \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \right]$$

Αναπτύσσω τις $\varphi(x), \psi(x)$ σε σειρές Fourier

$$\varphi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[\alpha_n \cdot \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \right] \quad \text{όπου} \quad \alpha_n = \frac{2}{L} \int_0^L \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \varphi(x)\, dx$$

$$\psi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[b_n \cdot \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \right] \quad \text{όπου} \quad b_n = \frac{2}{L} \int_0^L \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \psi(x)\, dx$$

Έτσι προκύπτει $\tilde{A}_n = \alpha_n$ και $\tilde{B}_n = \frac{L}{n\pi c} b_n$

Ε8. Μερικές Διαφορικές Εξισώσεις I   Στρατής   26/2/2019

'Ασκηση

Έστω το προηγούμενο ΠΑΣΤ

$u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0$, $x \in (0,L)$ $t>0$, $c>0$: σταθερό

$u(x,0) = \varphi(x)$ | $x \in [0,L]$

$u_t(x,0) = \psi(x)$ | επαρκώς ομαλές

$u(0,t) = u(L,t) = 0$ $t \geq 0$

Ορίζω :

$K(t) := \frac{1}{2}\int_0^L u_t^2(x,t)\,dx$: κινητική ενέργεια

$V(t) := \frac{c^2}{2}\int_0^L u_x^2(x,t)\,dx$: δυναμική ενέργεια

$E(t) := K(t) + V(t)$: Ολική Ενέργεια

$T := 2L/c$: περίοδος ταλάντωσης

$\tilde{K} := \frac{1}{T}\int_0^T K(t)\,dt$ μέση κινητική

$\tilde{V} := \frac{1}{T}\int_0^T V(t)\,dt$ μέση δυναμική

Να δειχθεί ότι

(i) $E(t) = E$ σταθερό $\forall t \geq 0$ (Διατήρηση της Ενέργειας)

(ii) $\tilde{K} = \tilde{V} = E/2$ (ισοκατανομή της μέσης κινητικής και μέσης δυναμικής ενέργειας)

Υπόδειξη: $E := \sum_{n=1}^{\infty}\left[\left(\frac{n\pi c}{2L}\right)^2 a_n^2 + 1/4 \cdot b_n^2\right]$ όπου a_n, b_n αυτά που βρήκατε πριν

Εξίσωση της Μεταφοράς

$u : \mathbb{R}^n \times [0,\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ $x = (x_1,\dots,x_n) \in \mathbb{R}^n$, $u = u(x,t)$

$Du = \mathrm{grad}\, u = \nabla u = D_x u = \left[\frac{\partial u}{\partial x_1},\dots,\frac{\partial u}{\partial x_n}\right]$

$b = (b_1,\dots,b_n) \in \mathbb{R}^n$: σταθερό (γνωστό) διάνυσμα

$\boxed{\frac{\partial u}{\partial t} + b\cdot Du = 0 \ , \text{ στο } \mathbb{R}^n \times [0,\infty)}$ εξίσωση μεταφοράς

Για $n=1$ $\longrightarrow$ $u_t + b\cdot u_x = 0$, $\mathbb{R}\times[0,\infty)$ $x\in\mathbb{R}, t>0$

Η ιδέα είναι η εξής: Αν μπορώ να την ανάγω σε συνήθη (δεν είναι πάντα εφικτό) Θέλω να βρω καμπύλες πάνω στο επίπεδο που πάνω σε αυτές θα ανάγεται σε συνήθη

$x = x(t)$: C καμπύλη Πάνω στη C: $u(x,t) = u(x(t),t)$

Παραγωγίζω πάνω στη C

$$\frac{du}{dt} = \frac{\partial u}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial u}{\partial t} \quad \text{επιλέγω} \quad \frac{dx}{dt} = b \Rightarrow \frac{du}{dt} = 0 \Rightarrow \text{Πάνω στη } C \text{ η } u \text{ σταθερή}$$

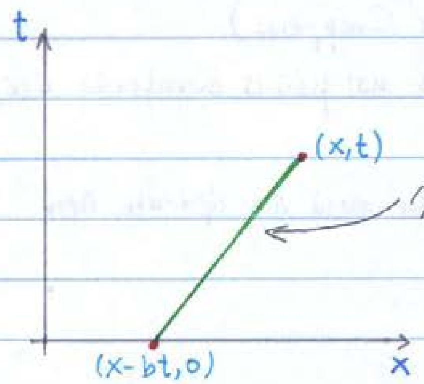
$$\Downarrow$$

Ευθείες $\longrightarrow$ $x = bt + x_0$, x_0 σταθερά

(Χαρακτηριστικές ευθείες) πάνω σε αυτές η u είναι σταθερή

Π.α.τ

$$(*)\begin{cases} u_t + b u_x = 0 & , x \in \mathbb{R},\ t > 0,\ b: \text{σταθερά} \\ u(x,0) = g(x) & , g \in C^1 \end{cases}$$



$$\longrightarrow u(x,t) = u(x-bt,0) = g(x-bt)$$

Θεώρημα: Το πατ $(*)$ με $g \in C^1(\mathbb{R})$ έχει κλασσική λύση

Παρατηρήσεις: 1 Αν η g δεν είναι C^1 τότε δεν έχω κλασσική λύση, έχει ασθενή λύση. Μπορούμε να δούμε πχ το Π.α.τ. με

$$u(x,0) = g(x) = \begin{cases} 0 & , |x| > 1 \\ 1-|x| & , |x| \leq 1 \end{cases} \rightsquigarrow u(x,t) = \begin{cases} 0 & , x > 1-t \text{ ή } x < -1-t \\ 1-|x+t| & , -1-t < x < 1-t \end{cases}$$

2 Καλώς τοποθετημένο πρόβλημα αν απαντάμε καταφατικά και στα 3 που ακολουθούν: (1) Ύπαρξη, (2) Μοναδικότητα (3) Συνεχής εξάρτηση από τα δεδομένα.