Μάθημα 1ο   Ε8. Μερικές Διαφορικές Εξισώσεις Ι   Στρατής   19/2/2019

Συμβολισμός

Θα λέμε ότι το $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ είναι ένας πολυδείκτης, αν είναι ένα διάνυσμα από στοιχεία $\alpha_j \in \mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, \ldots\}$
$|\alpha| = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j$: μήκος ή μέτρο του πολυδείκτη

Αν έχουμε 2 πολυδείκτες μπορούμε να γράφουμε:
$\alpha \leq \beta \overset{ορσ}{\iff} \alpha_j \leq \beta_j \quad , j = 1, 2, \ldots, n$
$\alpha \pm \beta = (\alpha_1 \pm \beta_1, \alpha_2 \pm \beta_2, \ldots, \alpha_n \pm \beta_n)$
Παραγοντικό πολυδείκτη : $\alpha! = \alpha_1! \cdot \alpha_2! \ldots \alpha_n!$
$x \in \mathbb{R}^n \quad , \quad x^\alpha = x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \ldots x_n^{\alpha_n}$

$$D^\alpha = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} \ldots \partial x_n^{\alpha_n}} = \frac{\partial^{\alpha_1}}{\partial x_1^{\alpha_1}} \cdot \frac{\partial^{\alpha_2}}{\partial x_2^{\alpha_2}} \cdots \frac{\partial^{\alpha_n}}{\partial x_n^{\alpha_n}}$$

αν μας ενδιαφέρουν "επαρκώς" ομαλές συναρτήσεις δεν παίζει ρόλο η σειρά παραγώγισης.

$k \in \mathbb{N} : D^k := \{ D^\alpha : |\alpha| \leq k \}$

Έστω $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ ανοιχτό και η $u : \Omega \to \mathbb{R}$ άγνωστη
Θεωρούμε την $F : \mathbb{R}^{n^k} \times \mathbb{R}^{n^{k-1}} \times \ldots \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \times \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ δεδομένη συνάρτηση

Η γενική μορφή μιας ΜΔΕ κ-τάξης είναι:
$F(D^k u(x), D^{k-1} u(x), \ldots, Du(x), x) = 0 \qquad (*)$

Θα λέμε ότι η $(*)$ είναι γραμμική αν έχει την εξής μορφή:
$\sum_{|\alpha| \leq k} \alpha_\alpha(x) D^k u(x) = f(x)$

Οιωνεί - γραμμική (quasilinear)

$$\sum_{|\alpha|\leq k} a_\alpha(D^{k-1}u(x),\dots,u(x),x)D^\alpha u(x) + a_0(D^{k-1}u(x),\dots,u(x),x)=0$$

Αν ο a_α είναι $a_\alpha(x)$ αυτή λέγεται σχεδόν γραμμική / ημιγραμμική (semilinear)

Ορισμός: Θα λέμε ότι η u είναι λύση της (*) αν:
- $u \in C^k(\Omega)$
- η u ικανοποιεί την (*) $\forall x \in \Omega$

Στο μάθημα θα ασχοληθούμε με τις γραμμικές

Γραμμικές ΜΔΕ $2^{ης}$ τάξης

$u \in C^2(\Omega)$, $x \in \mathbb{R}^n$

εσ. γινόμενο στο $\mathbb{R}^{n^2}$ εσ. γινόμενο στο $\mathbb{R}^n$

$$A(x)\cdot D^2u + b(x)\cdot Du + c(x)\cdot u = f(x)$$

$A: \Omega \to \mathbb{R}^{n\times n}$ (πίνακας συναρτήσεων) $a_{ij} \in C^1(\Omega)$

$b: \Omega \to \mathbb{R}^n$ (διάνυσμα συναρτήσεων) $b_i \in C^1(\Omega)$

$c: \Omega \to \mathbb{R}$ $c \in C(\Omega)$

$f: \Omega \to \mathbb{R}$ $f \in C(\Omega)$

συνήθως γράφουμε:

$$\sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x)\frac{\partial^2 u(x)}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^n b_i(x)\frac{\partial u(x)}{\partial x_i} + c(x)\,u(x) = f(x)$$

Αφού $u \in C^2(\Omega)$, χωρίς βλάβη της γενικότητας μπορούμε να υποθέσουμε ότι ο $A=(a_{ij})_{1\leq i,j\leq n}$ είναι συμμετρικός.

Αν δεν είναι μπορούμε να θεωρήσουμε τον

$A_s = \frac{1}{2}(A+A^T)$ και να τον αντικαταστήσουμε

ΕΒ. Μερικές Διαφορικές Εξισώσεις Ι   Στρατής   19/2/2019

A πραγματικός και συμμετρικός $\Rightarrow$ διαγωνιοποιήσιμος $\Rightarrow$ υπάρχει μετασχηματισμός συντεταγμένων $T(x)$: $T(x)A(x)T^T(x)$: διαγώνιος με διαγώνια στοιχεία $\lambda_j(x)$ $j=1,2,\dots,n$ $\forall x \in \Omega$

P: πλήθος των γνήσια θετικών ιδιοτιμών
Z: πλήθος των μηδενικών ιδιοτιμών

Κατάταξη Γραμμικών ΜΔΕ 2ης Τάξης

Η $\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x) \dfrac{\partial^2 u(x)}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^{n} b_i(x) \dfrac{\partial u(x)}{\partial x_i} + c(x)u(x) = f(x)$ λέγεται:

• Υπερβολική στο $x \in \Omega$ αν ισχύει:
$Z=0$ και είτε $P=1$ ή $P=n-1$
π.χ: $u_{tt} - \Delta u = 0$: Κυματική εξίσωση $\left(\Delta u = \Delta_x u = \sum_{j=1}^{n} \partial^2 u / \partial x_j^2 \quad u(\underbrace{x_1,\dots,x_n}_{x\in\mathbb{R}^n}, \underset{\in\mathbb{R}}{t}) \right)$

• Παραβολική στο $x \in \Omega$ αν ισχύει:
$Z=1$ και είτε $P=0$ ή $P=n-1$
π.χ: $u_t - \Delta u = 0$: Εξίσωση διάχυσης (θερμότητας)

• Ελλειπτική στο $x \in \Omega$ αν ισχύει:
$Z=0$ και $P=0$ ή $P=n$
π.χ: $\Delta u = 0$ $\left(\Delta u = \sum_{j=1}^{n} \partial^2 u / \partial x_j^2 \right)$ Εξίσωση Laplace

Υπάρχει και η Ultra Υπερβολική, δεν θα ασχοληθούμε στο μάθημα,
$Z=0$ και $1<P<n-1$

Για τις ελλειπτικές είναι ισοδύναμο να πούμε ότι ο $A(x)$ είναι θετικά ορισμένος $(\forall\, w \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\} : w^T A w > 0)$
Για τις παραβολικές είναι ισοδύναμο να πούμε ότι ο $A(x)$ είναι θετικά ημιορισμένος και όχι θετικά ορισμένος και $\operatorname{rank}[A(x) \,\vdots\, b(x)] = n$

Οι παραβολικές και οι υπερβολικές λέγονται και εξελικτικές

Μορφή Απόκλισης (divergence form)

$$\underbrace{D\cdot(A(x)\,Du)}_{div(A(x)\nabla u)} + b(x)\cdot Du + c(x)u = 0$$

πάντα μπορούμε να τη γράψουμε σαν

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^{n}\left[b_i(x) - \sum_{j=1}^{n}\partial a_{ij}(x)/\partial x_j\right]\partial u/\partial x_i + c(x)\cdot u = 0$$

Το αντίθετο δεν γίνεται, δεν μπορούν να γραφούν όλες σε μορφή απόκλισης.

Κατάταξη Γραμμικών ΜΔΕ $2^{ης}$ τάξης 2 μεταβλητών

$$a\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + b\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + c\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + d\frac{\partial u}{\partial x} + e\frac{\partial u}{\partial y} + q\cdot u = f$$

a, b, c, d, e, q, f : συναρτήσεις των x, y

Η κατάταξη εξαρτάται από το:

$$b^2 - 4ac \begin{cases} >0 : & \text{Υπερβολική} \\ =0 : & \text{Παραβολική} \\ <0 : & \text{Ελλειπτική} \end{cases}$$

Η ορολογία μπορούμε εύκολα να καταλάβουμε πως προέκυψε αν θέσουμε:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \xi^2 \qquad \frac{\partial u}{\partial x} = \xi$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \xi \cdot \eta$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \eta^2 \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = \eta$$

Θα πάρουμε $0 = a\xi^2 + b\cdot\xi\eta + c\cdot\eta^2 + d\xi + e\eta + q$

Θα δούμε τις κωνικές τομές που προκύπτουν σε κάθε περίπτωση

ΕΒ. Μερικές Διαφορικές Εξισώσεις Ι   Στράτης   19/2/2019

Παράδειγμα

Έστω η κυμματική εξίσωση

$$\begin{cases} u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0 \quad , 0<x<L \,, t>0 & c>0 \text{ γνωστή σταθερά} \\ u(x,0) = \varphi(x) \quad x\in[0,L] : \text{αρχικές συνθήκες} \\ u_t(x,0) = \psi(x) \\ u(0,t) = u(L,t) = 0 \quad , t\geq 0 & \text{συνοριακές συνθήκες Dirichlet} \end{cases}$$

Θα μπορούσαμε να έχουμε συνοριακές συνθήκες Neumann
$u_x(0,t) = u_x(L,t) = 0 \ , \ t\geq 0$

Η ιδέα της μεθόδου που μας επιτρέπει να βρούμε λύση
Μέθοδος χωριζομένων μεταβλητών : ψάχνω να βρω λύση της μορφής
$u(x,t) = X(x)\cdot T(t)$

Η εξίσωση μου θα γραφεί $\quad X(x)T''(t) - c^2 X''(x)T(t) = 0$

διαιρώ με $X\cdot T \Rightarrow \dfrac{T''}{c^2 T} = \dfrac{X''}{X} \quad \forall x, \forall t$

αναγκαστικά τότε $\quad \dfrac{T''}{c^2 T} = \dfrac{X''}{X} = \lambda$ (διαχωριστική σταθερα)

Από τις συνοριακές συνθήκες

$$\left.\begin{aligned} X(0)\cdot T(t) &= 0 \\ X(L)\,T(t) &= 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{aligned} X(0)&=0 \\ X(L)&=0 \end{aligned}$$

$X'' + \lambda X = 0$ $\quad$ Μια συνήθης διαφορική εξίσωση ως προς x
$X(0) = 0$
$X(L) = 0$

$T'' + \lambda c^2 T = 0$