ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΙΚΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΙΙ   ΕΑΡ. 2019

ΕΡΓΑΣΤΗΡΙΑΚΗ ΑΣΚΗΣΗ 2

1. Θεωρήστε την εξίσωση Van der Pol γραμμένη ως πρόβλημα αρχικών τιμών για σύστημα πρώτης τάξης:

$$\begin{cases} y_1' = f_1(y_1, y_2) = y_2, \\ y_2' = f_2(y_1, y_2) = 1000(1 - y_1^2)y_2 - y_1, & t \geq 0, \\ y_1(0) = 2, \quad y_2(0) = 0. \end{cases} \qquad (*)$$

α) Βρείτε τον Ιακωβιανό πίνακα $J_{ij} = \frac{\partial f_i}{\partial y_j}$, $1 \leq i, j \leq 2$, υπολογίστε τον για $y_1 = y_1(0)$ και $y_2 = y_2(0)$ και βρείτε τις ιδιοτιμές του. Συμπεράνετε ότι υπάρχει ισχυρή ένδειξη ότι το σύστημα (*) είναι άκαμπτο.

β) Λύστε αριθμητικά το πρόβλημα (*) χρησιμοποιώντας την συνάρτηση `scipy.integrate.solve_ivp` με μέθοδο `BDF` για $0 \leq t \leq 2000$ χρησιμοποιώντας `atol` $= 10^{-6}$, `rtol` $= 10^{-3}$. Χρησιμοποιήστε την αριθμητική λύση αυτή ως καλή προσέγγιση της λύσης του προβλήματος για $0 \leq t \leq 2000$.

γ) Προσπαθήστε να λύσετε το πρόβλημα (*) με την μέθοδο του Heun που υλοποιήσατε στην 1η εργαστηριακή άσκηση αφού την τροποποιήσετε για να δουλεύει για συστήματα. Πόσο μικρό πρέπει να πάρετε το h έτσι ώστε να βρείτε κάποια ευσταθή προσέγγιση της λύσης για $0 \leq t \leq 2000$;

2. Θεωρήστε το σύστημα που προκύπτει από την χωρική διακριτοποίηση της εξίσωσης της θερμότητας (βλ. συνημμένο) για $m = 49,\ \Delta x = 0.02$:

$$\begin{cases} u_j'(t) = \dfrac{1}{(\Delta x)^2}\left[u_{j-1}(t) - 2u_j(t) + u_{j+1}(t)\right], \quad 1 \leq j \leq m,\ \ t \geq 0, \\ u_0(t) = u_{m+1}(t) = 0, \quad t \geq 0, \\ u_j(0) = v_j, \quad 1 \leq j \leq m, \end{cases} \qquad (**)$$

που γράφεται στη μορφή για $u = (u_1, \dots, u_m)^T \in \mathbb{R}$

$$\begin{cases} u' = \dfrac{1}{(\Delta x)^2} A u, \quad t \geq 0, \\ u(0) = (v_1, \dots, v_m)^T, \end{cases}$$

όπου $A =$ τριδιαγ$(1, -2, 1),\ m \times m$. Είναι γνωστό (βλ. συνημμένο) ότι η ακριβής λύση του συστήματος δίδεται από τον τυπο

$$u(t) = \sum_{j=1}^{m} e^{\widetilde{\lambda}_j t} \left(u(0), \phi^{(j)}\right) \phi^{(j)},$$

όπου $\widetilde{\lambda}_j = \frac{1}{(\Delta x)^2}\left[-2 + 2\cos\frac{j\pi}{m+1}\right],\ 1 \leq j \leq m$,

$$\phi^{(j)} \in \mathbb{R}^m, \quad \phi_\ell^{(j)} = \sqrt{\frac{2}{m+1}} \sin\frac{\pi j \ell}{m+1}, \quad 1 \leq j, \ell \leq m$$

και $(\cdot, \cdot)$ το Ευκλείδειο εσωτερικό γινόμενο στο $\mathbb{R}^m$.

α) Δείξτε ότι $\widetilde{\lambda}_m < \widetilde{\lambda}_{m-1} < \ldots < \widetilde{\lambda}_1 < 0$ με $\widetilde{\lambda}_1 = -\pi^2 + \mathcal{O}((\Delta x)^2)$, $\widetilde{\lambda}_m = \frac{-4}{(\Delta x)^2} + \mathcal{O}(1)$. Συμπεράνετε ότι το σύστημα είναι άκαμπτο καθώς $\Delta x \to 0,\ m \to \infty\ ((m+1)\Delta x = 1)$.

β) Χρησιμοποιήστε $u(0) = \phi^{(1)} + \phi^{(2)}$, βρείτε την ακριβή λύση του συστήματος, λύστε το αριθμητικά με την μέθοδο `BDF` για $0 \leq t \leq 1$ με τα ίδια tolerances όπως στο ερώτημα 1 και υπολογίστε την νόρμα του σφάλματος $\|e\|_{2,\Delta x}$, όπου $e_j = u_j(t) - U_j$, $1 \leq j \leq m$, για $t = 1$, όπου U η αριθμητική λύση για $t = 1$. Η νόρμα $\|\cdot\|_{2,\Delta x}$ ορίζεται στον $\mathbb{R}^m$ ως $\|x\|_{2,\Delta x} = \left(\Delta x \sum_{j=1}^m x_j^2\right)^{1/2}$.

γ) Θεωρήστε την μέθοδο του Heun για το σύστημα αυτό με $u(0) = \phi^{(1)} + \phi^{(2)}$. Πόσο μικρό πρέπει να πάρετε το h έτσι η μέθοδος να είναι ευσταθής; Ποιο είναι το σφάλμα $\|e\|_{2,\Delta x}$ για το h που διαλέξατε;

δ) (Προαιρετικό). Βρείτε το διάστημα $[-\alpha, 0]$ απόλυτης ευστάθειας της μεθόδου του Heun. Πόσο μικρό πρέπει να πάρετε το $h = \Delta t$ (συναρτήσει του Δx) ώστε ο υπολογισμός με τη μέθοδο του Heun να είναι ευσταθής;

Επίσης, προφανώς, αν $\lambda \in \mathbb{C}, \operatorname{Re}\lambda \le 0$, τότε η λύση $y(t) = \mathrm{e}^{\lambda t}$ του προβλήματος (2.35) παραμένει φραγμένη,

$$\big|y(t)\big| = \mathrm{e}^{(\operatorname{Re}\lambda)t} \le 1, \quad t \in [0, \infty).$$

Ορισμός 2.1 (Περιοχή απόλυτης ευστάθειας.) Μια αριθμητική μέθοδος για την επίλυση του προβλήματος αρχικών τιμών (1.1) λέγεται *απόλυτα ευσταθής* για κάποιο $h > 0$, αν, όταν εφαρμοσθεί στο πρόβλημα (2.35), με $\lambda \in \mathbb{C}$, δίνει προσεγγίσεις $(y^n)_{n\in\mathbb{N}_0}$, οι οποίες παραμένουν φραγμένες καθώς το n τείνει προς το άπειρο. Η περιοχή S του μιγαδικού επιπέδου, τέτοια ώστε η μέθοδος να είναι απόλυτα ευσταθής, αν $h\lambda \in S$, λέγεται *περιοχή απόλυτης ευστάθειας* της μεθόδου. □

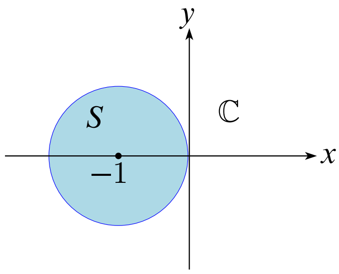
Στην περίπτωση μονοβηματικών μεθόδων οι προσεγγίσεις $(y^n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ παραμένουν φραγμένες για το πρόβλημα (2.35), για ένα συγκεκριμένο $h\lambda$, αν και μόνο αν $|y^{n+1}| \le |y^n|$.

Έτσι, επειδή $y^n = (1 + h\lambda)^n$, $n \in \mathbb{N}_0$, είναι η ακολουθία των προσεγγίσεων που δίνει η μέθοδος του Euler για το πρόβλημα (2.35), και αυτές οι προσεγγίσεις παραμένουν φραγμένες αν και μόνο αν $|1+h\lambda| \le 1$, συμπεραίνουμε ότι η περιοχή απόλυτης ευστάθειας της μεθόδου του Euler στο μιγαδικό επίπεδο είναι το σύνολο

$$S = \big\{z \in \mathbb{C} : \ |1 + z| \le 1\big\},$$

δηλαδή ακριβώς ο κλειστός δίσκος $|1 + z| \le 1$, με κέντρο -1 και ακτίνα 1, ο οποίος περιέχεται ολόκληρος στο αριστερό μιγαδικό ημιεπίπεδο $\{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z \le 0\}$. Αν $\operatorname{Re}\lambda < 0, |\lambda| \gg 1$, πρέπει να υπολογίσουμε με πολύ μικρό h, έτσι ώστε το $h\lambda$ να βρεθεί μέσα στον S. Αυτό συνιστά σοβαρό μειονέκτημα της μεθόδου του Euler, όταν θέλουμε να την εφαρμόσουμε σε *άκαμπτα* συστήματα, δηλαδή σε συστήματα της μορφής $x' = Ax$ για τα οποία υπάρχουν ιδιοτιμές λ_μ και λ_ν του A, με αρνητικό πραγματικό μέρος, τέτοιες ώστε $|\operatorname{Re}\lambda_\mu| \gg |\operatorname{Re}\lambda_\nu|$. Για τέτοια συστήματα αναγκαζόμαστε να πάρουμε πολύ μικρό h (έτσι ώστε $h\lambda_\mu \in S$) για να προσεγγίσουμε σωστά συνιστώσες της λύσης όπως η $\mathrm{e}^{\lambda_\mu t}$, παρ' όλο που αυτές ακριβώς οι συνιστώσες τείνουν πολύ γρήγορα στο μηδέν και, πρακτικά, δεν παίζουν κανέναν ρόλο στην εξέλιξη της λύσης πέρα από ένα μικρό οριακό στρώμα κοντά στο $t = 0$.

Παράδειγμα 2.5 Πολλά άκαμπτα συστήματα προκύπτουν από την αριθμητική προσέγγιση των λύσεων Μερικών Διαφορικών Εξισώσεων. Για να δούμε ένα παράδειγμα,



Σχήμα 2.1: Η περιοχή απόλυτης ευστάθειας S της μεθόδου του Euler.

θεωρούμε το εξής απλό πρόβλημα αρχικών και συνοριακών τιμών για την εξίσωση της θερμότητας: Ζητείται μια συνάρτηση $u : [0,1] \times [0,T] \to \mathbb{R}$, τέτοια ώστε

$$\begin{cases} u_t = u_{xx}, & (x,t) \in [0,1] \times [0,T], \\ u(x,0) = v(x), & x \in [0,1], \\ u(0,t) = u(1,t) = 0, & t \in [0,T], \end{cases}$$

όπου $v : [0,1] \to \mathbb{R}$ δεδομένη συνεχής συνάρτηση (αρχική συνθήκη), για την οποία, για λόγους συμβατότητας, υποθέτουμε ότι $v(0) = v(1) = 0$. Έστω $m \in \mathbb{N}$, $\Delta x := \frac{1}{m+1}$, και $x_j := j\Delta x$, $j = 0, \dots, m+1$. Προσεγγίζουμε την $u_{xx}(x_j,t)$ με το πηλίκο κεντρικών διαφορών $\frac{1}{(\Delta x)^2}\big[u(x_{j-1},t) - 2u(x_j,t) + u(x_{j+1},t)\big]$ και οδηγούμαστε στο εξής σύστημα Σ.Δ.Ε. για τις προσεγγίσεις $u_j(t)$ των $u(x_j,t)$:

$$\text{(2.36)} \quad \begin{cases} u_j'(t) = \dfrac{1}{(\Delta x)^2}\big[u_{j-1}(t) - 2u_j(t) + u_{j+1}(t)\big], \ 1 \le j \le m, \ t \in [0,T], \\ u_0(t) = u_{m+1}(t) = 0, \qquad t \in [0,T], \\ u_j(0) = v_j := v(x_j), \qquad 1 \le j \le m. \end{cases}$$

Με

$$A := \begin{pmatrix} -2 & 1 & & & 0 \\ 1 & -2 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & 1 & -2 & 1 \\ 0 & & & 1 & -2 \end{pmatrix}, \quad u := \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_m \end{pmatrix}$$

το πρόβλημα (2.36) γράφεται ως

$$\text{(2.37)} \quad \begin{cases} u' = \dfrac{1}{(\Delta x)^2} A u, \qquad 0 \le t \le T, \\ u(0) = \big(v_1, \dots, v_m\big)^T. \end{cases}$$

Οι ιδιοτιμές $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ του πίνακα A είναι αρνητικοί αριθμοί, και δίνονται από τους τύπους

$$\lambda_j = -2 + 2\cos\frac{j\pi}{m+1}, \quad j = 1, \dots, m,$$

βλ. την Άσκηση 2.24. Συνεπώς οι ιδιοτιμές του πίνακα $\widetilde{A} := \frac{1}{(\varDelta x)^2}A$ είναι

$$\tilde{\lambda}_j = \frac{1}{(\varDelta x)^2}\Big[-2 + 2\cos\frac{j\pi}{m+1}\Big], \quad j = 1, \dots, m.$$

Προφανώς ισχύει $\tilde{\lambda}_m < \tilde{\lambda}_{m-1} < \cdots < \tilde{\lambda}_1 < 0$. Επί πλέον

$$\tilde{\lambda}_1 = \frac{-2 + 2\cos(\pi\varDelta x)}{(\varDelta x)^2} = -\pi^2 + O\big((\varDelta x)^2\big)$$

$$\tilde{\lambda}_m = \frac{-2 + 2\cos(\pi - \pi\varDelta x)}{(\varDelta x)^2} = -\frac{4}{(\varDelta x)^2} + O(1).$$

Είναι προφανές ότι το σύστημα (2.37) είναι άκαμπτο, όταν πάρουμε $\varDelta x \ll 1$. Προσεγγίζοντας τη λύση του με τη μέθοδο του Euler, για να είμαστε στην περιοχή απόλυτης ευστάθειας $\{z \in \mathbb{C} : |1 + z| \le 1\}$ της μεθόδου, θα πρέπει να διακριτοποιήσουμε το σύστημα (2.37) ως προς τον χρόνο t με βήμα $\varDelta t$ τέτοιο ώστε $\tilde{\lambda}_m \varDelta t \ge -2$, συνεπώς με $\varDelta t = O\big((\varDelta x)^2\big)$, γεγονός το οποίο αποτελεί σοβαρότατο περιορισμό για το $\varDelta t$.

Για να παρατηρήσουμε το φαινόμενο αυτό στην πράξη, μπορούμε να κάνουμε ένα *υπολογιστικό πείραμα*. Κατ' αρχάς, δεν είναι δύσκολο να διαπιστώσουμε (βλ. την Άσκηση 2.24) ότι τα (ορθοκανονικά ως προς το Ευκλείδειο εσωτερικό γινόμενο του $\mathbb{R}^m$) ιδιοδιανύσματα $\varphi^{(j)}$ του πίνακα $\widetilde{A}$, που αντιστοιχούν στις ιδιοτιμές $\tilde{\lambda}_j$, $1 \le j \le m$, έχουν συνιστώσες $\varphi_\ell^{(j)}$, $1 \le \ell \le m$, που δίνονται από τους τύπους

$$\varphi_\ell^{(j)} = \sqrt{\frac{2}{m+1}}\sin\frac{\pi j \ell}{m+1}, \quad 1 \le j, \ell \le m.$$

Συνεπώς, η λύση του προβλήματος αρχικών τιμών (2.37) είναι (βλ. Άσκηση 1.24) η διανυσματική συνάρτηση

$$u(t) = \mathrm{e}^{t\widetilde{A}}u(0) := \sum_{j=1}^{m} \mathrm{e}^{\tilde{\lambda}_j t}\big(u(0), \varphi^{(j)}\big)\varphi^{(j)},$$

όπου με $(\cdot,\cdot)$ συμβολίζουμε το Ευκλείδειο εσωτερικό γινόμενο στον $\mathbb{R}^m$ και $u(0) = (v_1, \dots, v_m)^T$. Ειδικότερα, αν πάρουμε ως αρχική συνθήκη το διάνυσμα $u(0) = \varphi^{(1)}$, το πρόβλημα (2.37) έχει τη λύση

$$u(t) = \mathrm{e}^{\tilde{\lambda}_1 t}\varphi^{(1)}, \quad 0 \le t \le T, \tag{2.38}$$

λόγω της ορθογωνιότητας των $\{\varphi^{(j)}\}$.

Η μέθοδος του Euler για το σύστημα (2.37) παράγει την ακολουθία u^n, $u^n \approx u(t^n)$, $t^n = n\Delta t$, βάσει των σχέσεων

$$\begin{cases} u^{n+1} = u^n + \Delta t \widetilde{A} u^n, \quad n = 0, 1, 2, \dots, N-1, \\ u^0 = u(0), \end{cases} \tag{2.39}$$

όπου υποθέσαμε ότι $\Delta t = T/N$. Αν πάρουμε $m = 49$, δηλαδή $\Delta x = 0.02$, ο περιορισμός $\tilde{\lambda}_m \Delta t \geq -2$ μας επιβάλλει να υπολογίσουμε τις προσεγγίσεις u^n με Δt πολύ μικρό. Συγκεκριμένα, πρέπει

$$\Delta t \leq (\Delta x)^2 \Big/ \Big[2\cos^2 \frac{\pi \Delta x}{2} \Big] \approx 2.00198\,(-4). \tag{2.40}$$

(Χρησιμοποιούμε τον συμβολισμό $\alpha\,(-4) = \alpha \cdot 10^{-4}$ κ.ο.κ.) Αν λύσουμε το σύστημα αριθμητικά με τη μέθοδο του Euler παίρνοντας ως αρχική τιμή $u(0) = \varphi^{(1)}$ και $m = 49$, $T = 1$, και υπολογίσουμε με διάφορα Δt την Ευκλείδεια νόρμα $\|u^N\|$ της αριθμητικής λύσης στο τελικό βήμα (προσέγγιση της ακριβούς τιμής $\|u(1)\|$, η οποία, βάσει της (2.38), είναι ίση με $\|u(1)\| = \mathrm{e}^{\tilde{\lambda}_1} \approx 5.19\,(-5)$), παίρνουμε τα αποτελέσματα του Πίνακα 2.3. Είναι σαφές ότι η συνθήκη (2.40) είναι απαραίτητη για την ευστάθεια της αριθμητικής λύσης. Ο Πίνακας 2.4 δίνει τα σφάλματα $\|u(1) - u^N\|$, $N\Delta t = 1$, της μεθόδου, για αρκετά μικρές τιμές του Δt. Η τελευταία στήλη του δίνει τις "υπολογιστικές" τιμές της τάξης ακρίβειας p της μεθόδου που ορίζονται ως εξής: Δεδομένων Δt_1, Δt_2 (εδώ $\Delta t_1 > \Delta t_2$) υπολογίζουμε τα αντίστοιχα σφάλματα $\varepsilon_1 := \|u(1) - u^{N_1}\|$, $\varepsilon_2 := \|u(1) - u^{N_2}\|$, όπου $N_1 \Delta t_1 = N_2 \Delta t_2 = 1$. Υπολογίζουμε κατόπιν τον αριθμό $p = p_{1,2}$,

$$p_{1,2} := \frac{\ln(\varepsilon_1/\varepsilon_2)}{\ln(\Delta t_1/\Delta t_2)},$$

που αποτελεί μια εκτίμηση της τάξης ακρίβειας της μεθόδου με βάση τις μετρήσεις ε_1, Δt_1 και ε_2, Δt_2. (Πράγματι, αν υποθέσουμε ότι $\varepsilon \approx C\Delta t^p$, τότε $\varepsilon_i \approx C\Delta t_i^p$, $i = 1, 2$, δηλαδή $(\varepsilon_1/\varepsilon_2) \approx (\Delta t_1/\Delta t_2)^p$, και η προσέγγισή μας προκύπτει αν πάρουμε λογαρίθμους.) Στον Πίνακα 2.4 (και σε παρόμοιους πίνακες στη συνέχεια) η τιμή του p γράφεται στη γραμμή που αντιστοιχεί στο Δt_2. Έτσι, π.χ.,

$$0.9974 \approx \frac{\ln(0.50335/0.25212)}{\ln(2/1)}.$$

Παρατηρούμε ότι καθώς το Δt ελαττώνεται, η πειραματική τιμή του p πλησιάζει τη θεωρητική τιμή $p = 1$ της τάξης ακρίβειας της μεθόδου του Euler. (Στους Πίνακες 2.3

Δt	$\|u^N\|$
$2.06\ (-4)$	$O(10^{102})$
$2.02\ (-4)$	$O(10^{22})$
$2.01\ (-4)$	7.51
$2.002\,(-4)$	$5.14\,(-5)$
$2.0\ (-4)$	$5.14\,(-5)$
$1.0\ (-4)$	$5.16\,(-5)$
$2.0\ (-6)$	$5.19\,(-5)$

Πίνακας 2.3: Μέγεθος αριθμητικής λύσης $\|u^N\|$, $N\Delta t = 1$, για διάφορα Δt. Μέθοδος Euler, (2.39).

Δt	$\|u(1) - u^N\|$	p
$2.0\ (-4)$	$0.50335\,(-6)$	
$1.0\ (-4)$	$0.25212\,(-6)$	0.9974
$5.0\ (-5)$	$0.12617\,(-6)$	0.9987
$2.5\ (-5)$	$0.63114\,(-7)$	0.9994
$1.25\,(-5)$	$0.31564\,(-7)$	0.9997
$6.25\,(-6)$	$0.15784\,(-7)$	0.9998

Πίνακας 2.4: Σφάλματα μεθόδου Euler, $N\Delta t = 1$, και αντίστοιχες υπολογιστικές τιμές της τάξης ακρίβειας p της μεθόδου.

και 2.4 οι υπολογισμοί έχουν γίνει με διπλή ακρίβεια, αλλά παραθέτουμε μόνο πέντε δεκαδικά ψηφία.)

Μια τελευταία παρατήρηση: Η ειδική λύση (2.38), την οποία προσεγγίζουμε με τη μέθοδο του Euler, περιέχει μόνο το εκθετικό $\mathrm{e}^{\tilde{\lambda}_1 t}$, λόγω της ειδικής αρχικής συνθήκης $u(0) = \varphi^{(1)}$ που επιλέξαμε. (Αντίθετα, μια αυθαίρετη επιλογή του $u(0)$ με μη μηδενικές προβολές $\big(u(0), \varphi^{(j)}\big)\varphi^{(j)}$ σε όλες τις “κατευθύνσεις” $\varphi^{(j)}$ θα οδηγούσε στη γενική λύση

$$\sum_{j=1}^{m} \mathrm{e}^{\tilde{\lambda}_j t}\big(u(0), \varphi^{(j)}\big)\varphi^{(j)},$$

η οποία περιέχει όρους με εκθετικές συναρτήσεις του χρόνου που φθίνουν με όλες τις σταθερές απόσβεσης $\tilde{\lambda}_j$ και όχι μόνο τον όρο $\mathrm{e}^{\tilde{\lambda}_1 t}$.) Θα έλεγε λοιπόν κανείς ότι επειδή μόνο το εκθετικό $e^{\tilde{\lambda}_1 t}$ εμφανίζεται στη λύση (2.38), θα έπρεπε η συνθήκη για απόλυτη ευστάθεια να ήταν απλώς $\tilde{\lambda}_1\,\Delta t \geq -2$, που μας δίνει περίπου $\Delta t \leq 2/\pi^2 \approx 0.2$ και δεν συνιστά σοβαρό περιορισμό του Δt. Παρά ταύτα, το αριθμητικό μας πείραμα δείχνει ότι η περιοριστική συνθήκη $\tilde{\lambda}_m \Delta t \geq -2$ είναι απαραίτητη, έστω και αν η μόνη φαινομενικά παρούσα ιδιοτιμή είναι η $\tilde{\lambda}_1$! Ο λόγος είναι ο εξής: Λόγω σφαλμάτων στρογγύλευσης, η αριθμητική λύση δεν έχει μη μηδενική συνιστώσα μόνο στην κατεύθυνση $\varphi^{(1)}$, αλλά και σε όλες τις άλλες κατευθύνσεις $\varphi^{(j)}$. Όπως είδαμε, οι συνιστώσες αυτές μεταβάλλονται χρονικά όπως τα εκθετικά $e^{\tilde{\lambda}_j t}$. Γιαυτό, πρέπει να μεριμνήσουμε ώστε $\tilde{\lambda}_m \Delta t \geq -2$, δηλαδή να βρεθούν *όλες* οι ποσότητες $\Delta t \tilde{\lambda}_j$, $1 \leq j \leq m$, μέσα στο διάστημα απόλυτης ευστάθειας $[-2, 0]$ της μεθόδου, δηλαδή την τομή της περιοχής απόλυτης ευστάθειάς της με τον πραγματικό άξονα. Είναι αξιοσημείωτο (και κάπως ειρωνικό) ότι η μεγαλύτερη απολύτως, αρνητική ιδιοτιμή $\tilde{\lambda}_m$, η οποία και προσδιορίζει το μέγιστο επιτρεπτό Δt, αντιστοιχεί σε συνιστώσα της λύσης που εξελίσσεται όπως το $e^{\tilde{\lambda}_m t}$, δηλαδή αποσβένεται ταχύτερα από όλες τις άλλες συνιστώσες! □

Παράδειγμα 2.6 Έστω $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ μια συνεχώς παραγωγίσιμη συνάρτηση. Θεωρούμε το πρόβλημα αρχικών τιμών

$$\begin{cases} y' = \lambda y + f'(t) - \lambda f(t), & t \geq 0, \\ y(0) = y_0, \end{cases} \tag{2.41}$$

όπου $\lambda \in \mathbb{C}$ με $\operatorname{Re}\lambda < 0$. Η λύση είναι προφανώς

$$y(t) = f(t) + e^{\lambda t}\big[y(0) - f(0)\big], \quad t \geq 0. \tag{2.42}$$

Αν η f δεν μεταβάλλεται γρήγορα με το t, τότε στη (2.42) ο δεύτερος όρος του δεξιού μέλους τείνει πολύ γρήγορα στο μηδέν και ο σημαντικός όρος για τη λύση είναι ο πρώτος. Το πρόβλημα (2.41) είναι ένα τυπικό παράδειγμα προβλήματος αρχικών τιμών για μια *άκαμπτη* (απλή) Διαφορική Εξίσωση. Το χαρακτηριστικό των άκαμπτων (απλών) Δ.Ε. είναι ότι η γενικά ομαλή λύση τους μεταβάλλεται αργά με το t, όταν αυτό δεν είναι πολύ κοντά σε κάποια τιμή $t_\star$ (εδώ $t_\star = 0$)· περιέχει όμως και μια συνιστώσα, η οποία μεταβάλλεται πολύ γρήγορα κοντά στο $t_\star$, η οποία για t όχι πολύ κοντά στο $t_\star$ δεν επηρεάζει σχεδόν καθόλου τη λύση.

Έστω $h > 0$ και $t^n := nh$, $n \in \mathbb{N}_0$. Από τη (2.42) έπεται αμέσως ότι ισχύει

$$y(t^{n+1}) = f(t^{n+1}) + e^{\lambda h}\big[y(t^n) - f(t^n)\big], \quad n \geq 0. \tag{2.43}$$

Το γενικό βήμα της μεθόδου του Euler για την προσέγγιση των λύσεων του προβλήματος (2.41) είναι

$$y^{n+1} = f(t^n) + hf'(t^n) + (1 + h\lambda)\big[y^n - f(t^n)\big], \quad n \geq 0. \tag{2.44}$$