Μάθημα 23ο Ε6. Εφαρμοσμένη Συναρτησιακή Ανάλυση 29/5/2019

Άσκηση: Έστω $y \in \mathcal{H}$ και Π το φραγμένο γραμμικό συναρτησιακό $\Pi(x) = \langle x, y \rangle$, $x \in \mathcal{H}$. Να βρεθούν οι τελεστές Π^*, $\Pi^*\Pi$ και $\Pi\Pi^*$

Λύση:

$\Pi : \mathcal{H} \to \mathbb{C}$, $\Pi^* : \mathbb{C} \to \mathcal{H}$

Έστω $x \in \mathcal{H}$, $z \in \mathbb{C}$ και παίρνουμε

$\langle \Pi(x), z \rangle_{\mathbb{C}} = \Pi(x)\bar{z} = \langle x, y \rangle_{\mathcal{H}} \cdot \bar{z} = \langle x, zy \rangle_{\mathcal{H}}$. Άρα $\Pi^*(z) = z \cdot y$

Επίσης $(\Pi^*\Pi)(x) = \Pi^*(\Pi(x)) = \Pi(x)\, y = \langle x, y \rangle y$

$(\Pi\Pi^*)(z) = \Pi(\Pi^*(z)) = \langle \Pi^*(z), y \rangle = \langle zy, y \rangle = z\|y\|^2$

Άσκηση: Έστω K συμπαγής τελεστής και (x_n) φραγμένη ακολουθία. Να δειχθεί ότι αν $\langle x_n, y \rangle \to \langle x, y \rangle$, για κάθε $y \in \mathcal{H}$, τότε $Kx_n \to Kx$

Λύση:

Χωρίς βλάβη της γενικότητας υποθέτουμε ότι $x = 0$

Έστω ότι $Kx_n \not\to 0$. Άρα υπάρχει $\varepsilon > 0$ και υπακολουθία (x_{n_k}) της (x_n) τέτοια ώστε $\|Kx_{n_k}\| \geq \varepsilon$, $k = 1, 2, \ldots$

Η (Kx_{n_k}) έχει συγκλίνουσα υπακολουθία $Kx_{n_{k_j}} \to z \in \mathcal{H}$

Έχουμε τότε για $y = K^*z$

$$\left.\begin{aligned} &\langle x_{n_{k_j}}, y \rangle \to 0 \\ &\quad\;\; \| \\ &\langle Kx_{n_{k_j}}, z \rangle \to \|z\|^2 \end{aligned}\right\} \Longrightarrow \|z\|^2 = 0$$

, όμως $\|z\| \geq \varepsilon$. Άτοπο

Άσκηση: Έστω $\mathcal{H}$ απειροδιάστατος διαχωρίσιμος χώρος Hilbert. Να εξεταστεί αν είναι αληθείς οι παρακάτω προτάσεις:

(1) αν $A^n = I$ για κάποιο $n \in \mathbb{N}$ τότε ο A δεν είναι συμπαγής

(2) αν $AB = 0$ τότε ένας τουλάχιστον από τους A, B είναι συμπαγής.

(3) αν T_n συμπαγής, $n \in \mathbb{N}$ και $T_n x \to Tx$ για κάθε $x \in \mathcal{H}$, τότε T συμπαγής.

Λύση:

(1) Αν A συμπαγής τότε $I = A^n = A\,A^{n-1}$, γινόμενο φραγμένου με συμπαγή, συμπαγής. άρα I συμπαγής. Άτοπο.

(2) P προβολή ώστε $Ran(P) = M$, $M^{\perp}$ απειροδιάστατοι. Τότε P, $I - P$ όχι συμπαγείς

Όμως $P(I - P) = P - P^2 = P - P = 0$.

(3) $\{e_k\}$ ορθοκανονική βάση. P_n : προβολή στον $<e_1, \dots, e_n>$, δηλαδή $P_n x = \sum_{k=1}^{n} <x, e_k> e_k$, τότε P_n συμπαγής και $P_n x \to x = I x$ όμως I όχι συμπαγής.

$T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$, διαγωνοποιείται, δηλαδή υπάρχει φασματική ανάλυση, δηλαδή υπάρχει ορθοκανονική βάση $\{\varphi_n\}$ που αποτελείται από ιδιοδιανύσματα του T
$T\varphi_n = \mu_n \varphi_n$
Η απεικόνιση $U : \mathcal{H} \to \ell^2$, $Ux = (<x, \varphi_1>, <x, \varphi_2>, \dots)$ είναι ισομορφισμός χώρων Hilbert. (δηλαδή μοναδιαίος τελεστής)

$$\begin{tikzcd} \mathcal{H} \arrow[r, "I"] & \mathcal{H} \arrow[d, "U"] \\ \ell^2 \arrow[u, "U^{-1}"] \arrow[r, "D"] & \ell^2 \end{tikzcd}$$

Θέτουμε $D = UTU^{-1}$

Οι D, T λέγονται μοναδιαία ισοδύναμοι, τότε $\|D\| = \|T\|$, $\sigma(D) = \sigma(T)$

Π.χ $\|T\| = \sup_{x \in \mathcal{H}} \frac{\|Tx\|}{\|x\|} = \sup_{y \in \ell^2} \frac{\|TU^{-1}y\|}{\|U^{-1}y\|} = \sup_{y \in \ell^2} \frac{\|UTU^{-1}y\|}{\|y\|} = \sup_{y \in \ell^2} \frac{\|Dy\|}{\|y\|} = \|D\|$

Ισχύει $U^{-1}(x_1, x_2, \dots) = \sum_{n=1}^{\infty} x_n \varphi_n$, άρα
$(TU^{-1})(x_1, \dots, x_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu_n x_n \varphi_n$
και άρα $(UT^{-1}U)(x_1, \dots, x_n) = (\mu_1 x_1, \mu_2 x_2, \dots)$
Άρα $D(x_1, x_2, \dots) = (\mu_1 x_1, \mu_2 x_2, \dots)$ δηλαδή D διαγώνιος
Όμως ξέρουμε $\|D\| = \sup|\mu_n|$
$\sigma(D) = \overline{\{\mu_1, \mu_2, \dots\}}$
άρα $\|T\| = \sup|\mu_n|$
$\sigma(T) = \overline{\{\mu_1, \mu_2, \dots\}}$

$\|L^{-1}\| = \sup|\lambda_n^{-1}| = \max|\lambda_n^{-1}|$