Μάθημα 21ο ΕΣ. Εφαρμοσμένη Συναρτησιακή Ανάλυση 20/5/2019

Προβλήματα Συνοριακών Τιμών

$\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ φραγμένο χωρίο

$$(*)\begin{cases} -\sum_{i,j=1}^{n} \{ \alpha_{ij}(x) u_{x_i} \}_{x_j} = f(x) & \text{στο } \Omega \\ u = g & \text{, στο } \partial\Omega \end{cases}$$

Παρατήρηση: Αν όλες οι συναρτήσεις που εμφανίζονται είναι ομαλές, τότε πολλαπλασιάζοντας με μια $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$ και ολοκληρώνοντας παίρνουμε ότι

$$\int_\Omega f \varphi \, dx = -\int_\Omega \sum_{i,j} \{ \alpha_{ij}(x) u_{x_i} \}_{x_j} \varphi \, dx = \int_\Omega \sum_{i,j}^{n} \alpha_{ij}(x) u_{x_i} \varphi_{x_j} \, dx$$

Υποθέσεις: • $\alpha_{ij}(x) = \alpha_{ji}(x)$

• $\lambda |\xi|^2 \le \sum_{i,j=1}^{n} \alpha_{ij}(x) \xi_i \xi_j \le \Lambda |\xi|^2$, $\lambda, \Lambda > 0$ $\forall \xi \in \mathbb{R}^n$, $\forall x \in \Omega$ (ομοιόμορφη ελλειπτικότητα)

• $\alpha_{ij} \in L^\infty(\Omega)$

• $f \in L^2(\Omega)$, $g \in H^1(\Omega)$

Ορισμός: Μια συνάρτηση $u \in H^1(\Omega)$ λέγεται ασθενής λύση του προβλήματος (*), αν:

$$\int_\Omega \sum_{i,j=1}^{n} \alpha_{ij}(x) u_{x_i} \varphi_{x_j} \, dx = \int_\Omega f \varphi \, dx$$ για κάθε $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$ και $u - g \in H_0^1(\Omega)$

Θεώρημα: Το πρόβλημα συνοριακών τιμών (*) έχει μοναδική ασθενή λύση $u \in H^1(\Omega)$ η οποία εξαρτάται συνεχώς από τις $f \in L^2(\Omega)$, $g \in H^1(\Omega)$

Απόδειξη:

Για $v, w \in H^1(\Omega)$ ορίζουμε $A(v,w) = \int_\Omega \sum \alpha_{ij}(x) v_{x_i} \overline{w}_{x_j} \, dx$

Άρα η u είναι ασθενής λύση αν και μόνο αν

$A(u, \varphi) = \langle f, \varphi \rangle_{L^2(\Omega)}$ $\forall \varphi \in C_c^\infty(\Omega)$

ή ισοδύναμα $\forall \varphi \in H_0^1(\Omega)$

Άρα ζητούμε ύπαρξη και μοναδικότητα $u \in H^1(\Omega)$ τέτοια ώστε

$$\begin{cases} A(u,\varphi) = \langle f, g \rangle & \forall \varphi \in H_0^1(\Omega) \\ u-g \in H^1(\Omega) \end{cases}$$

Για κάθε $v \in H^1(\Omega)$ έχουμε: $\lambda \int_\Omega |\nabla u|^2 dx \leq A(v,v) \leq \Lambda \int_\Omega |\nabla u|^2 dx$

Η απεικόνιση $A(v,w)$ ικανοποιεί όλες τις ιδιότητες του εσωτερικού γινομένου, εκτός από το ότι ισχύει $A(v,v)=0$ για μη μηδενικές συναρτήσεις, τις σταθερές.

Αν όμως θεωρήσουμε το $A(v,w)$ στο $H_0^1(\Omega)$ τότε είναι εσωτερικό γινόμενο και η νόρμα που επάγει είναι ισοδύναμη με τη νόρμα Sobolev.

Θέτουμε $u-g=v$. Άρα ζητούμε ύπαρξη και μοναδικότητα $v \in H_0^1(\Omega)$ τέτοια ώστε $A(v,\varphi) = \langle f, \varphi \rangle - A(g,\varphi) \quad \forall \varphi \in H_0^1(\Omega)$

Ισοδύναμα $A(\varphi, v) = \langle \varphi, f \rangle - A(\varphi, g) \quad \forall \varphi \in H_0^1(\Omega)$

Θέτουμε $\Pi(\varphi) = \langle \varphi, f \rangle - A(\varphi, g)$, $\varphi \in H_0^1(\Omega)$

Έχουμε

$$\begin{aligned} |\Pi(\varphi)| &\leq \|\varphi\|_{L^2(\Omega)} \cdot \|f\|_{L^2(\Omega)} + \Lambda \|\nabla \varphi\|_{L^2(\Omega)} \|\nabla g\|_{L^2(\Omega)} \\ &\leq \left(\|f\|_{L^2(\Omega)} + \Lambda \|\nabla g\|_{L^2(\Omega)} \right) \|\varphi\|_{H_0^1(\Omega)} \\ &\leq C \cdot \left(\|f\|_{L^2(\Omega)} + \Lambda \|\nabla g\|_{L^2(\Omega)} \right) A(\varphi,\varphi)^{1/2} \end{aligned}$$

Άρα το Π είναι φραγμένο στο χώρο Hilbert $(H_0^1(\Omega), A(\cdot,\cdot))$ και

$\|\Pi\| \leq c_1 \|f\|_{L^2(\Omega)} + c_2 \|\nabla g\|_{L^2(\Omega)}$

Από το θεώρημα αναπαράστασης του Riesz υπάρχει μοναδική $v \in H_0^1(\Omega)$ τέτοια ώστε $A(\varphi, v) = \Pi(\varphi) \quad \forall \varphi \in H_0^1(\Omega)$

άρα έχουμε ύπαρξη και μοναδικότητα. Επιπλέον

$\lambda \int |\nabla v|^2 dx \leq A(v,v)^{1/2} = \|\Pi\| \leq C_1 \|f\|_{L^2(\Omega)} + C_2 \|\nabla g\|_{L^2(\Omega)}$

Άρα $\|u\|_{H^1(\Omega)} \leq \|g\|_{H^1(\Omega)} + \|v\|_{H^1(\Omega)} \leq C_1' \|f\|_{L^2(\Omega)} + C_2' \|g\|_{H^1(\Omega)}$

Θεωρούμε ότι $g=0$. Το πρόβλημα συνοριακών τιμών είναι

$$(*) \begin{cases} -\sum (\alpha_{ij}(x) u_{x_i})_{x_j} = f & \text{στο } \Omega \\ u = 0 & \text{στο } \partial\Omega \end{cases}$$

Η $u \in H_0^1(\Omega)$ είναι λύση αν $(**)$ $A(u,\varphi) = \langle f, \varphi \rangle \quad \forall \varphi \in H_0^1(\varphi)$

Ε6. Εφαρμοσμένη Συναρτησιακή Ανάλυση 20/5/2019

Θέλουμε να θέσουμε το πρόβλημα (*) χρησιμοποιώντας τελεστές. Δηλαδή να ορίσουμε έναν τελεστή L ώστε η (*) (ή (**)) να γράφεται $Lu = f$

Θέτουμε $D(L) = \{ u \in H_0^1(\Omega) : \exists f \in L^2(\Omega) \text{ ώστε } A(u,\varphi) = \langle f, \varphi \rangle \ \forall \varphi \in H_0^1(\Omega) \}$ και για $u \in D(L)$ θέτουμε $Lu = f$

Άρα $A(u,\varphi) = \langle Lu, \varphi \rangle \quad \forall u \in D(L) \quad \forall \varphi \in H_0^1(\Omega)$

Παρατήρηση: Αν $u \in H_0^1(\Omega)$ τότε $\forall \varphi \in H_0^1(\Omega)$

$|A(u,\varphi)| \leq \Lambda \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)} \|\nabla \varphi\|_{L^2(\Omega)} \leq \Lambda \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)} \|\varphi\|_{H^1(\Omega)}$ άρα

$\varphi \to A(u,\varphi)$ φραγμένη στον $H_0^1(\Omega)$.

Αν επιπλέον $u \in D(L)$ τότε $|A(u,\varphi)| = |\langle Lu, \varphi \rangle| \leq \|Lu\|_{L^2(\Omega)} \|\varphi\|_{L^2(\Omega)}$ και άρα $\varphi \to A(u,\varphi)$, $\varphi \in H_0^1(\Omega)$ είναι φραγμένη και ως προς την $\|\cdot\|_{L^2(\Omega)}$

Άσκηση: Να δειχθεί ότι $D(L) = \{ u \in H_0^1(\Omega) : \varphi \to A(\varphi,u) \text{ είναι φραγμένη ως προς } \|\cdot\|_{L^2(\Omega)} \}$

Παρατήρηση: Η συνοριακή συνθήκη $u|_{\partial\Omega} = 0$ εμπεριέχεται στον L αφού $D(L) \subset H_0^1(\Omega)$

Πρόταση: Ο $L : D(L) \to L^2(\Omega)$ είναι 1-1 και επί και ο L^{-1} είναι ένας φραγμένος τελεστής από τον $L^2(\Omega)$ στον $H_0^1(\Omega)$, δηλαδή $\|L^{-1} f\|_{H_0^1(\Omega)} \leq C \|f\|_{L^2(\Omega)} \quad \forall f \in L^2(\Omega)$

Απόδειξη:

Το 1-1 και επί έπονται από την ύπαρξη και μοναδικότητα ασθενούς λύσης.

Επιπλέον, έστω $f \in L^2(\Omega)$, u τέτοια ώστε $Lu = f$, τότε

$\lambda \|\nabla u\|^2_{L^2(\Omega)} \leq A(u,u) = \langle f, u \rangle \to \lambda \|\nabla u\|^2_{L^2(\Omega)} \leq \|f\|_{L^2(\Omega)} \|u\|_{L^2(\Omega)}$

$\leq C \cdot \|f\|_{L^2(\Omega)} \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)} \to \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)} \leq \frac{C}{\lambda} \|f\|_{L^2(\Omega)}$

Μάθημα 22ο: Εσ. Εφαρμοσμένη Συναρτησιακή Ανάλυση 22/5/2019

Συνέχεια Άσκησης 13

(iii) $p>1$ $\quad u \in W^{1,p}(B(1)) \iff \begin{cases} u \in L^p(B(1)) \longrightarrow \int_{B(1)} |u|^p dx = \int_{B(1)} |x|^{\alpha p} dx \\ \nabla u \in L^p(B(1)) \longrightarrow \int_{B(1)} |\nabla u|^p dx = |\alpha|^p \int_{B(1)} |x|^{(\alpha-1)p} dx \quad (\nabla u = \alpha |x|^{\alpha-2} x) \end{cases}$

Πρέπει και τα 2 να είναι πεπερασμένα.
Έχουμε δει ότι $\int_{B(1)} |x|^{\beta} dx < +\infty \iff \beta > -n$

Άρα πρέπει $\alpha p > -n$ και $(\alpha-1)p > -n \iff (\alpha-1)p > -n \iff$
$\alpha p > p - n \iff \alpha > 1 - \frac{n}{p}$
Επίσης από πριν για να έχουμε ασθενή παράγωγο πρέπει $\alpha > 1-n$
Άρα τελικά η $u \in W^{1,p}(B(1)) \iff \alpha > 1 - \frac{n}{p}$

Άσκηση 12: Έστω $u : \Omega \to \mathbb{R}$ ασθενώς παραγωγίσιμη και $\psi \in C^\infty$. Να δειχθεί ότι η συνάρτηση $u\psi$ είναι ασθενώς παραγωγίσιμη στο Ω και ισχύει ο γνωστός τύπος για την παράγωγο γινομένου.

Λύση:

Έστω $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$. Έχουμε

$$\int_\Omega u\psi \varphi_{x_i} dx = -\int \underbrace{\square}_{u_{x_i}\psi + u\psi_{x_i}} \varphi \, dx$$

$\psi \cdot \varphi \in C_c^\infty(\Omega)$. Άρα

$$\int_\Omega u (\psi\varphi)_{x_i} dx = -\int_\Omega u_{x_i} \psi \varphi \, dx$$

$$\| $$

$$\int_\Omega u(\psi_{x_i}\varphi + \psi\varphi_{x_i}) dx$$

Άρα $\int_\Omega u\psi\varphi_{x_i} dx = -\int_\Omega (u_{x_i}\psi + u\psi_{x_i})\varphi \, dx$

Άσκηση 14: Να δειχθεί ότι η ανισότητα Sobolev
$\|u\|_{L^q(\mathbb{R}^n)} \le C \cdot \|\nabla u\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}$, $u \in W_0^{1,p}(\mathbb{R}^n)$ δεν ισχύει για κανένα $q \neq p^*$.

Λύση:

Ισοδύναμα $\sup_{u \in W_0^{1,p}(\mathbb{R}^n)} \overbrace{\frac{\|u\|_{L^q(\mathbb{R}^n)}}{\|\nabla u\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}}}^{= I[u]} = +\infty$

Έστω $u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$. Για $\lambda > 0$ θέτουμε $u_\lambda(x) = u(\lambda x)$

Έχουμε $\|u_\lambda\|^q_{L^q(\mathbb{R}^n)} = \int_{\mathbb{R}^n} |u_\lambda(x)|^q dx = \int_{\mathbb{R}^n} |u(\lambda x)|^q dx$

Θέτουμε $y = \lambda x$

$$\Downarrow$$

$$dy = \lambda^n dx$$

Άρα $\|u_\lambda\|^q_{L^q(\mathbb{R}^n)} = \lambda^{-n} \int_{\mathbb{R}^n} |u(y)|^q dy = \lambda^{-n} \|u\|^q_{L^q(\mathbb{R}^n)}$

Επίσης $(\nabla u_\lambda)(x) = \lambda(\nabla u)(\lambda x)$ άρα

$\|\nabla u_\lambda\|^p_{L^p(\mathbb{R}^n)} = \int_{\mathbb{R}^n} |(\nabla u_\lambda)(x)|^p dx = \lambda^p \int_{\mathbb{R}^n} |(\nabla u)(\lambda x)|^p dx = \lambda^{p-n} \|\nabla u\|^p_{L^p(\mathbb{R}^n)}$

Άρα $I[u_\lambda] = \dfrac{\|u_\lambda\|_{L^q}}{\|\nabla u_\lambda\|_{L^p}} = \dfrac{\lambda^{-n/q} \|u\|_{L^q(\mathbb{R}^n)}}{\lambda^{1-n/p} \|\nabla u\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}} = \lambda^{n/p - n/q - 1} I[u]$

Ισχύει $\dfrac{n}{p} - \dfrac{n}{q} - 1 = 0 \iff \dfrac{n}{q} = \dfrac{n-p}{p} \iff q = \dfrac{np}{n-p} = p^*$

Αν $q \neq p^*$ τότε $\dfrac{n}{p} - \dfrac{n}{q} - 1 \neq 0 \implies$

αν $\dfrac{n}{p} - \dfrac{n}{q} - 1 > 0$ τότε $I[u_\lambda] \xrightarrow[\lambda \to \infty]{} +\infty$

αν $\dfrac{n}{p} - \dfrac{n}{q} - 1 < 0$ τότε $I[u_\lambda] \xrightarrow[\lambda \to 0]{} +\infty$

$\underline{\Omega}$ φραγμένο

$$\begin{cases} -\sum_{i,j=1}^{n} \{\alpha_{ij}(x) u_{x_i}\}_{x_j} = f & \text{στο } \underline{\Omega} \\ u = 0 & \text{, στο } \partial\underline{\Omega} \end{cases}$$

$Lu = f$, $f \in L^2(\underline{\Omega})$

$A(v,w) = \int \sum_{i,j} \alpha_{ij}(x) u_{x_i} \bar{w}_{x_j} dx$

Παρατήρηση: Ο L δεν είναι φραγμένος

Ε6. Εφαρμοσμένη Συναρτησιακή Ανάλυση

22/5/2019

Πρόταση: Ο L^{-1} είναι συμπαγής και αυτοσυζυγής

Απόδειξη:

Έστω $f, g \in L^2(\Omega)$. Τότε

$$< f, L^{-1}g > = < LL^{-1}f, L^{-1}g > = A(L^{-1}f, L^{-1}g) = A(L^{-1}g, L^{-1}f)$$

$$= < LL^{-1}g, L^{-1}f > = <g, L^{-1}f> = < L^{-1}f, g >$$ άρα αυτοσυζυγής

Έχουμε δει ότι η λύση u της $Lu = f$ ικανοποιεί

$\|\nabla u\|_{L^2} \leq c\|f\|_{L^2}$ δηλαδή $\|u\|_{H^1} \leq c\|f\|_{L^2}$ δηλαδή

$\|L^{-1}f\|_{H^1} \leq c\|f\|_{L^2}$

Έστω (f_n) φραγμένη ακολουθία στον $L^2(\Omega)$. Τότε η $(L^{-1}f_n)$ είναι φραγμένη ακολουθία στοιχείων του $H_0^1(\Omega)$. Από το Θεώρημα Συμπάγειας του Rellich υπάρχει υπακολουθία $(L^{-1}f_{n_k})$ συγκλίνουσα στον $L^2(\Omega)$. Άρα L^{-1} συμπαγής.

Θεώρημα: (φασματικό θεώρημα για τον L)

Υπάρχει μια ορθοκανονική βάση $\{\varphi_n\}$ του $L^2(\Omega)$ που αποτελείται από ιδιοσυναρτήσεις του L.

Παρατηρήσεις. Έστω λ_n οι αντίστοιχες ιδιοτιμές. Τότε

1. Κάθε ιδιοτιμή έχει πεπερασμένη πολλαπλότητα
2. $\lambda_n > 0$
3. $\lambda_n \to +\infty$

Απόδειξη:

Εφαρμόζουμε το φασματικό θεώρημα για συμπαγείς αυτοσυζυγείς τελεστές στον L^{-1} και χρησιμοποιούμε το ότι

$$L\varphi_n = \lambda_n \varphi_n \iff L^{-1}\varphi_n = \lambda_n^{-1}\varphi_n.$$

Έχουμε

$$\lambda_n = < \lambda_n \varphi_n, \varphi_n > = < L\varphi_n, \varphi_n > = A(\varphi_n, \varphi_n) > 0$$

Πρόταση: Ισχύει $D(L) = \{u \in L^2(\Omega) : \sum_n \lambda_n^2 |<u, \varphi_n>|^2 < +\infty\}$ και για $u \in D(L)$

$$Lu = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n < u, \varphi_n > \varphi_n.$$

Απόδειξη:

Έστω $u \in D(L)$ και έστω $f = Lu$. Τότε $u = L^{-1}f$ άρα
$$u = L^{-1}\left(\sum_{n=1}^{\infty} \langle f, \varphi_n\rangle \varphi_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^{-1} \langle f, \varphi_n\rangle \varphi_n$$
Άρα $\langle u, \varphi_n\rangle = \lambda_n^{-1}\langle f, \varphi_n\rangle \implies$
$$\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^2 |\langle u, \varphi_n\rangle|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |\langle f, \varphi_n\rangle|^2 < +\infty$$
Αντίστροφα, έστω ότι $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^2 |\langle u, \varphi_n\rangle|^2 < +\infty$
Θέτουμε $f = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \langle u, \varphi_n\rangle \varphi_n$ τότε
$$L^{-1}f = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^{-1}\lambda_n \langle u, \varphi_n\rangle \varphi_n = \sum_{n=1}^{\infty} \langle u, \varphi_n\rangle \varphi_n = u$$
Άρα $u \in Ran(L^{-1}) = D(L)$