Μάθημα 17ο: Ε6. Εφαρμοσμένη Συναρτησιακή Ανάλυση 6/5/2019

Λήμμα: Αν η u είναι ασθενώς παραγωγίσιμη στο Ω, τότε $\forall \varepsilon>0$
$(u_\varepsilon)_{x_i} = (u_{x_i})_\varepsilon$, στο Ω_ε

Απόδειξη:

Έστω $x \in \Omega_\varepsilon$, θέτουμε $\rho_\varepsilon^x(y) = \rho_\varepsilon(x-y)$ τότε

$$(u_\varepsilon)_{x_i}(x) = \int_\Omega \rho_{\varepsilon,x_i}(x-y)u(y)dy = -\int_\Omega \rho^x_{\varepsilon,y_i}(y)u(y)\,dy = \int_\Omega \rho_\varepsilon(x-y)u_{y_i}(y)dy = (u_{y_i})_\varepsilon(x)$$

Ορισμός Ο $W_0^{1,p}(\Omega)$ ορίζεται ως η κλειστή θήκη του $C_c^\infty(\Omega)$ στον $W^{1,p}(\Omega)$ (κλειστός υπόχωρος του $W^{1,p}(\Omega)$)

Πρόταση: Ισχύει $W_0^{1,p}(\mathbb{R}^n) = W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$

Απόδειξη: Αρκεί να δείξουμε ότι ο $C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ είναι πυκνός στον $W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$

Βήμα 1ο: Έστω $u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$, θεωρούμε $\psi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ τέτοια ώστε

$$\begin{cases} \psi(x) = 1 & , |x| \le 1 \\ \psi(x) = 0 & , |x| \ge 2 \end{cases}$$

$$\psi_n(x) = \psi(x/n) = \begin{cases} 1 & , |x| \le n \\ 0 & , |x| \ge 2n \end{cases}$$

Θέτουμε $u_n = \psi_n u$, θα δείξουμε ότι $u_n \to u$ στον $W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$

Έχουμε

$$\|u_n - u\|^p_{L^p(\mathbb{R}^n)} = \int_{\mathbb{R}^n} |u|^p \cdot |1-\psi_n|^p dx \xrightarrow{\text{Θ. Κυρ. Συγκλισης}} 0$$

Επίσης

$$\|\nabla u_n - \nabla u\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} = \|\psi_n \nabla u + u\nabla\psi_n - \nabla u\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \le \underbrace{\|(1-\psi_n)\nabla u\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}}_{\to 0} + \|u\nabla\psi_n\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}$$

Έχουμε

$$\|u\nabla\psi_n\|_{L^p} \le \|\nabla\psi_n\|_{L^\infty}\|u\|_{L^p} = \frac{1}{n}\|\nabla\psi\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)}\|u\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \longrightarrow 0$$

Βήμα 2ο: Δείχνουμε ότι η τυχαία $u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$ με συμπαγή φορέα μπορεί να προσεγγιστεί από συναρτήσεις $C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$

Θέτουμε $u_\varepsilon = \rho_\varepsilon * u$. Άρα $u_\varepsilon \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$

Από ιδιότητες ομαλοποιητών έχουμε ότι

$$\|u_\varepsilon - u\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} = \|u_\varepsilon - u\|_{L^p(\mathbb{R}^n_\varepsilon)} \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{} 0$$

Επίσης $\|u_{\varepsilon,x_i} - u_{x_i}\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} = \|(u_{x_i})_\varepsilon - u_{x_i}\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{} 0$

Θεώρημα (ανισότητα Poincaré)

Έστω $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ φραγμένο χωρίο. Υπάρχει $C>0$ τέτοιο ώστε

$$\|u\|_{L^p(\Omega)} \le C \|\nabla u\|_{L^p(\Omega)} \quad , u \in W_0^{1,p}(\Omega)$$

Απόδειξη:

Αρκεί να δειχθεί για $u \in C_c^\infty(\Omega)$

Χωρίς περιορισμό της γενικότητας, υποθέτουμε ότι το Ω περιέχεται ανάμεσα στα υπερεπίπεδα $x_1 = 0$, $x_1 = \alpha$

Επεκτείνουμε την u να είναι ίση με 0 στο $\mathbb{R}^n \setminus \Omega$

Έστω $x \in \Omega$

$$|u(x)| = \left|\int_0^{x_1} u_{x_1}(t, x_2, \dots, x_n)\, dt\right| \le \int_0^{\alpha} |u_{x_1}(t, x_2, \dots, x_n)|\, dt$$

$$\overset{\text{ανισότητα Hölder}}{\le} \alpha^{\frac{p-1}{p}} \left(\int_0^{\alpha} |u_{x_1}(t, x_2, \dots, x_n)| dt\right)^{1/p}$$

Άρα $|u(x)|^p \le \alpha^{p-1} \int_0^{\alpha} |u_{x_1}(t, x_2, \dots, x_n)|^p dt$

$$\Longrightarrow \int_0^{\alpha} |u(x_1, \dots, x_n)|^p dx_1 \le \alpha^p \int_0^{\alpha} |u_{x_1}(x_1, \dots, x_n)|^p dx_1 \le \alpha^p \int_0^{\alpha} |\nabla u(x_1, \dots, x_n)|^p dx_1$$

ολοκληρώνουμε ως προς $x_2, \dots, x_n$

$$\Longrightarrow \int_\Omega |u(x)|^p dx \le \alpha^p \int_\Omega |\nabla u(x)|^p dx$$

Παρατήρηση: Άρα για $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$, έχουμε

$$\|\nabla u\|_{L^p(\Omega)} \le \|u\|_{W^{1,p}(\Omega)} \le C\left[\|u\|_{L^p(\Omega)} + \|\nabla u\|_{L^p(\Omega)}\right] \le C_1 \|\nabla u\|_{L^p(\Omega)}$$

δηλαδή η $\|\nabla u\|_{L^p(\Omega)}$ είναι ισοδύναμη νόρμα με την $\|u\|_{W^{1,p}(\Omega)}$

Θεώρημα (ανισότητα Sobolev)

Έστω $1 \le p < n$ και $p^* = \frac{p \cdot n}{n-p}$ $(p^* > p)$. Υπάρχει $C = C(n,p)$ (σταθερά):

$$\|u\|_{L^{p^*}(\mathbb{R}^n)} \le C \|\nabla u\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \quad , u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$$

Απόδειξη:

Αφού $W^{1,p}(\mathbb{R}^n) = W_0^{1,p}(\mathbb{R}^n)$, αρκεί να δειχθεί η ανισότητα για $u \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ [γιατί;]

Έστω λοιπόν $u \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$. Πρώτα για $p=1$

Έχουμε $\forall\, x \in \mathbb{R}^n$ $\forall\, i = 1, \dots, n$

$$|u(x)| \le \int_{-\infty}^{+\infty} |\nabla u(x_1, \dots, y_i, \dots, x_n)|\, dy_i \qquad i = 1, \dots, n$$

$$\Longrightarrow |u(x)|^{\frac{n}{n-1}} \le \prod_{i=1}^{n} \left(\int_{-\infty}^{\infty} |\nabla u(x_1, \dots, y_i, \dots, x_n)| dy_i\right)^{1/n-1}$$

ΕΣ. Εφαρμοσμένη Συναρτησιακή Ανάλυση 6/5/2019

Άρα

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |u(x)|^{\frac{n}{n-1}}\, dx_1 \le \left(\int_{-\infty}^{+\infty} |\nabla u(y_1, x_2, \dots, x_n)|\, dy_1\right)^{\frac{1}{n-1}} \int_{-\infty}^{+\infty} \prod_{i=2}^{n} \Big(\underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} |\nabla u(x_1, \dots, y_i, \dots x_n)|\, dy_i}_{g_i(x_1)} \Big)^{1/n-1} dx_1 \quad (*)$$

τα ολοκληρώματα μέσα στο γινόμενο

Κάνω Hölder $\int (g_2 \dots g_n)^{1/n-1}\, dx_1 \le \left(\int g_2\, dx_1\right)^{1/n-1} \dots \left(\int g_n\, dx_1\right)^{1/n-1}$

$$(*) \le \left(\int_{-\infty}^{+\infty} |\nabla u(y_1, x_2, \dots, x_n)|\, dy_1\right)^{1/n-1} \cdot \prod_{i=2}^{n} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} |\nabla u(x_1, \dots, y_i, \dots x_n)|\, dy_i\, dx_1 \right)^{1/n-1}$$

$$= \left(\int_{-\infty}^{+\infty} |\nabla u|\, dy_1\right)^{1/n-1} \prod_{i=2}^{n} I_i^{\frac{1}{n-1}}$$