Μάθημα 16ο Εφ. Εφαρμοσμένη Συναρτησιακή Ανάλυση 17/4/2019

Έστω $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ χωρίο
Έστω $u \in L^1_{loc}(\Omega)$ ορίζουμε $u_\varepsilon(x) = \int_\Omega \rho_\varepsilon(x-y)u(y)\,dy$, $x \in \Omega_\varepsilon$
$\iff u_\varepsilon(x) = \int_{B(x,\varepsilon)} \rho_\varepsilon(x-y)u(y)\,dy$

Πρόταση: Έστω $u \in L^1_{loc}(\Omega)$ ισχύουν τα εξής
(i) $u_\varepsilon \in C^\infty(\Omega_\varepsilon)$
(ii) αν $u \in C^k(\Omega)$ τότε $D^\alpha u_\varepsilon = (D^\alpha u)_\varepsilon$, για κάθε πολυδείκτη $\alpha$ με $|\alpha| \leq k$
(iii) αν $u \in C(\Omega)$ τότε $u_\varepsilon \to u$ ομοιόμορφα στα συμπαγή υποσύνολα του $\Omega$
(iv) αν $u \in C^k(\Omega)$ τότε $D^\alpha u_\varepsilon \to D^\alpha u$ ομοιόμορφα στα συμπαγή υποσύνολα του $\Omega$.
(v) αν $u \in L^p(\Omega)$ τότε $\|u_\varepsilon - u\|_{L^p(\Omega_\varepsilon)} \to 0$. Ειδικότερα $u_\varepsilon \to u$ στον $L^p(U)$ $\forall$ $U \subset\subset \Omega$

Απόδειξη:
Στο έξτρα φυλλάδιο που υπάρχει στην eclass για ομαλοποιητές

Πρόταση. Έστω $u \in L^1_{loc}(\Omega)$. Αν $\int_\Omega u \cdot \varphi \,dx = 0$ $\forall$ $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$
τότε $u = 0$ σχεδόν παντού.

Ασθενείς Παράγωγοι

Ορισμός: Λέμε ότι η συνάρτηση $u \in L^1_{loc}(\Omega)$ είναι ασθενώς παραγωγίσιμη, αν υπάρχουν συναρτήσεις $g_1, \dots, g_n \in L^1_{loc}(\Omega)$, τέτοιες ώστε $\int_\Omega u \varphi_{x_i}\,dx = -\int_\Omega g_i \varphi\,dx$ $\forall$ $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$

Αν η $u$ είναι ασθενώς παραγωγίσιμη, τότε από την προηγούμενη πρόταση οι $g_1, \dots, g_n$ είναι μοναδικές. Θα τις ονομάζουμε ασθενείς παραγώγους της $u$ και θα τις συμβολίζουμε με $u_{x_i}$ ή $\partial u / \partial x_i$

Παρατηρήσεις
1) Αν $u \in C^1(\Omega)$ τότε η $u$ ασθενώς παραγωγίσιμη και οι κλασσικές και ασθενείς παράγωγοι συμπίπτουν.

② Τοπικότητα της ασθενής παραγώγου

Αν $u, v$ ασθενώς παραγωγίσιμες στο $\Omega$ και $u=v$ στο ανοικτό $U \subset \Omega$ τότε $u_{x_i} = v_{x_i}$ στο $U$

$$\left( -\int_U u_{x_i}\varphi = \int_\Omega u\varphi_{x_i}\,dx = \int_\Omega v\varphi_{x_i}\,dx = -\int_U v_{x_i}\varphi\,dx \right)$$

③ Αν $u$ ασθενώς παραγωγίσιμη στο $\Omega$ και $u \in C^1(U)$ όπου $U$ ανοικτό υποσύνολο του $\Omega$ τότε η κλασσική και η ασθενής παράγωγος συμπίπτουν στο $U$.

Παρατήρηση: $u, v$ ασθενώς παραγωγίσιμες $\not\Rightarrow$ $u\cdot v$ ασθενώς παραγωγίσιμη
$[u, v \in L^1 \not\Rightarrow u\cdot v \in L^1]$

$\hookrightarrow$ $u(t) = t^{-1/2}$ $L^1(0,1)$ όμως $u^2 \notin L^1(0,1)$

$\int_0^1 t^{-1/2}dt < +\infty$ $\int_0^1 t^{-1}dt = \infty$

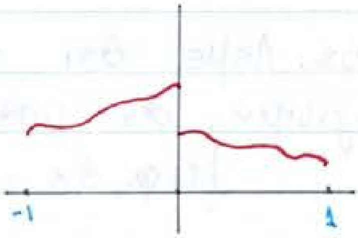
Έστω $\Omega$ χωρίο του $\mathbb{R}^n$

Ορισμός: Ορίζουμε $W^{1,p}(\Omega) = \{u \in L^p(\Omega),\ u \text{ ασθενώς παραγωγίσιμη και } u_{x_i} \in L^p(\Omega)\}$ και τον ονομάζουμε χώρο Sobolev. $1 \le p < \infty$

Για $p=2$ γράφουμε $W^{1,2}(\Omega) = H^1(\Omega)$

Παράδειγμα: Έστω $f(t) = \begin{cases} g(t), & -1<t<0 \\ h(t), & 0<t<1 \end{cases}$

υποθέτουμε $g \in C^1([-1,0])$, $h \in C^1([0,1])$




Αν υπάρχει η ασθενής παράγωγος $f'$ της $f$, τότε θα ισούται με την $v(t) = \begin{cases} g'(t), & -1<t<0 \\ h'(t), & 0<t<1 \end{cases}$

Έστω $\varphi \in C_c^\infty(-1,1)$ τότε

$$\int_{-1}^1 f\varphi'\,dt = \int_{-1}^0 g\varphi'\,dt + \int_0^1 h\varphi'\,dt = -\int_{-1}^0 g'\varphi\,dt + g(0)\varphi(0) - \int_0^1 h'\varphi\,dt - h(0)\cdot\varphi(0)$$

$$= -\int_{-1}^1 v\varphi\,dt + \varphi(0)\left(g(0) - h(0)\right)$$

Άρα $f$ ασθενώς παραγωγίσιμη αν και μόνο αν $g(0) = h(0)$, δηλαδή αν $f$ συνεχής

# Ε6. Εφαρμοσμένη Συναρτησιακή Ανάλυση 17/4/2019

**Παρατήρηση:** Μια συνάρτηση $u \in L^1_{loc}(\alpha,\beta)$ είναι ασθενώς παραγωγίσιμη αν και μόνο αν είναι απόλυτα συνεχής σε κάθε κλειστό διάστημα $I \subset\subset (\alpha,\beta)$ και η ασθενής παράγωγος είναι σχεδόν παντού ίση με την κλασσική.

**Παρατήρηση:** Ο $W^{1,p}(\Omega)$ είναι γραμμικός χώρος, και γίνεται νορμικός χώρος αν εφοδιαστεί με την νόρμα

$$\|u\|_{W^{1,p}(\Omega)} = \left(\int_\Omega (|u|^p + |\nabla u|^p)\,dx\right)^{1/p}$$

ασθενής κλίση

Ειδικότερα ο $W^{1,2}(\Omega)$ είναι χώρος εσωτερικού γινομένου με το εσωτερικό γινόμενο $\langle u, v\rangle_{W^{1,2}(\Omega)} = \int_\Omega (u\bar{v} + \nabla u \overline{\nabla v})\,dx$

$|\nabla u|^2 = |u_{x_1}|^2 + \dots + |u_{x_m}|^2$

$u_k \to u$ στο $W^{1,p}(\Omega) \Leftrightarrow u_k \to u$ στον $L^p$ και $(u_k)_{x_i} \to u_{x_i}$ στον $L^p$

**Θεώρημα:** Ο $W^{1,p}(\Omega)$ είναι χώρος Banach

**Απόδειξη:**

Έστω $(u_k)$ ακολουθία Cauchy στον $W^{1,p}(\Omega)$

Τότε οι ακολουθίες $(u_k)$, $((u_k)_{x_i})$ $i=1,\dots,n$ είναι Cauchy στον $L^p(\Omega)$ αφού ο $L^p(\Omega)$ πλήρης υπάρχουν συναρτήσεις $u, g_1, \dots, g_n \in L^p(\Omega)$, τέτοιες ώστε

$u_k \to u$

$(u_k)_{x_1} \to g_1$ Θα δείξουμε ότι $u$ ασθενώς παραγωγίσιμη

$\vdots$

$(u_k)_{x_n} \to g_n$ και $u_{x_i} = g_i$

Έστω λοιπόν $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$. Τότε

$$\int_\Omega u\varphi_{x_i}\,dx = \lim_{k\to\infty}\int_\Omega u_k \varphi_{x_i}\,dx = -\lim_{k\to\infty}\int_\Omega (u_k)_{x_i}\varphi\,dx = -\int_\Omega g_i\varphi\,dx$$

Άρα $u \in W^{1,p}(\Omega)$. Επίσης $u_k \to u$ στον $W^{1,p}(\Omega)$ αφού $u_k \to u$ στον $L^p(\Omega)$ και $(u_k)_{x_i} \to g_i = u_{x_i}$ στον $L^p(\Omega)$

Άρα $W^{1,p}(\Omega)$ πλήρης.