Μάθημα 14ο   Ε6. Εφαρμοσμένη Συναρτησιακή Ανάλυση   10/4/2019

Παράδειγμα: Να βρεθεί η συνάρτηση Green καθώς και οι ιδιοτιμές και ιδιοσυναρτήσεις για τον τελεστή Sturm-Liouville

$$\begin{cases} Lu = -u'' & \text{στο } (0,1) \\ u(0) = 0 \\ u'(1) = 0 \end{cases}$$

- Βρίσκουμε τις u_1, u_2
- Για τη u_1 θέλουμε $\begin{cases} -u_1'' = 0 \\ u_1(0) = 0 \end{cases}$

Έχουμε $u_1(x) = Ax + B$, πρέπει $B = 0$ (από την $u_1(0) = 0$) το A ελεύθερο, γιατί δεν θέλουμε την τετριμμένη $A \neq 0$

Επιλέγουμε $A = 1 \implies u_1(x) = x$

- Για τη u_2 θέλουμε $\begin{cases} -u_2'' = 0 \\ u_2'(1) = 0 \end{cases}$

Έχουμε $u_2(x) = Ax + B$, από $u_2'(1) = 0 \implies B = -A$

Επιλέγουμε $u_2(x) = x - 1$

- Επίσης $c = -pW \overset{p=1}{\implies} c = -W = -(u_1u_2' - u_2u_1') \implies$

$c = -(x \cdot 1 - (x-1) \cdot 1) = -1$

- Άρα η συνάρτηση Green είναι: $k(x,t) = \begin{cases} \frac{1}{c} u_1(x) u_2(t), & x \leq t \\ \frac{1}{c} u_1(t) u_2(x), & x \geq t \end{cases}$

άρα στο παράδειγμά μας $k(x,t) = \begin{cases} -x(1-t) & : x \leq t \\ -t(1-x) & : x \geq t \end{cases}$

- Θέλουμε όλα τα $\lambda \in \mathbb{R}$ για τα οποία υπάρχουν $\varphi \in D(L)$, $\varphi \neq 0$ τω $L\varphi = \lambda\varphi$

Άρα πρέπει: $\begin{cases} -\varphi'' = \lambda\varphi \\ \varphi(0) = 0 \\ \varphi'(1) = 0 \end{cases}$

Διακρίνω περιπτώσεις για το λ και λύνω την διαφορική εξίσωση

(i) $\lambda < 0 \qquad \lambda = -\mu^2 \qquad (\mu > 0)$

$\Rightarrow \varphi'' - \mu^2\varphi = 0$

Γενική λύση $\qquad \varphi(x) = Ae^{\mu x} + Be^{-\mu x}$

Τότε $\quad \varphi(0) = A + B$ και

$\varphi'(x) = \mu A e^{\mu x} - \mu B e^{-\mu x}$ $\qquad$ άρα πρέπει $\begin{cases} A + B = 0 \\ \mu A e^{\mu} - \mu B e^{-\mu} = 0 \end{cases}$,(μ παράμετρος)

$\Rightarrow A e^{\mu} + A e^{-\mu} = 0 \Rightarrow A = B = 0$

Άρα ο L δεν έχει αρνητικές ιδιοτιμές.

(ii) $\lambda = 0$ $\qquad$ Τότε $\qquad \varphi'' = 0$ $\qquad$ άρα η γενική λύση $\varphi(x) = Ax + B$

πρέπει $\quad \varphi(0) = 0 \Leftrightarrow B = 0$

$\qquad \varphi'(1) = 0 \Leftrightarrow A = 0$

Άρα το 0 δεν είναι ιδιοτιμή

(iii) $\lambda > 0$, $\lambda = \mu^2 \quad (\mu > 0) \Rightarrow -\varphi'' = \mu^2\varphi \Rightarrow \varphi'' + \mu^2\varphi = 0$

Γενική λύση $\quad \varphi(x) = A\cos(\mu x) + B\sin(\mu x)$

πρέπει $\quad \varphi(0) = 0 \Leftrightarrow A = 0$

$\varphi'(x) = -\mu A \sin(\mu x) + \mu B\cos(\mu x) \overset{A=0}{=} \mu B\cos(\mu x)$

$\varphi'(1) = \mu B\cos(\mu) = 0 \Rightarrow \cos(\mu) = 0 \Rightarrow \mu = \mu_n = 2\pi n + \frac{\pi}{2}, \; n = 0, 1, \dots$

Άρα οι ιδιοτιμές του L είναι οι

$$\lambda_n = \mu_n^2 = \left(2\pi \cdot n + \frac{\pi}{2}\right)^2, \quad n = 0, 1, \dots$$

και μια αντίστοιχη ιδιοσυνάρτηση είναι η:

$\varphi_n(x) = \sin\left(\left(2\pi n + \frac{\pi}{2}\right)x\right)$ $\qquad$ (επιλέγουμε B ελεύθερα)

Παρατήρηση: Είδαμε ότι οι ιδιοτιμές $\{\lambda_n\}$ του L είναι τέτοιες ώστε $|\lambda_n| \to +\infty$

- Θα δείξουμε ότι αν $\alpha\alpha' = \beta\beta' = 0$ τότε $\lambda_n \to +\infty$

Έστω $M > 0$ τέτοιο ώστε $|q(x)| \le M$ στο $[0,1]$

Έστω λ ιδιοτιμή του L, $L\varphi = \lambda\varphi \quad \|\varphi\| = 1$

Τότε $\quad \lambda = \underset{\langle \lambda\varphi, \varphi\rangle = \lambda\langle\varphi,\varphi\rangle = \lambda\|\varphi\| \;(=1)}{\langle L\varphi, \varphi\rangle} = -\int_0^1 ((p\varphi')' + q\varphi)\varphi\, dx = \int_0^1 p(\varphi')^2 dx - [p\varphi'\varphi]\Big|_{x=0}^{x=1} + \int_0^1 q\varphi^2 dx$

κάνω παραγοντική ολοκλήρωση $\quad \ge 0$ (υπόθεση) $\qquad = 0$ (σσ') άρα $\lambda = \int_0^1 q\varphi^2 dx > -\int_0^1 M\varphi^2 dx = -M$

• Αν $\alpha \cdot \alpha' \neq 0$ και $\beta\beta' \neq 0$

Τότε έχουμε $\lambda > -M - p(1)\varphi'(1)\varphi(1) + p(0)\varphi(0)\varphi'(0)$

άρα αρκεί $\varphi(0)\varphi'(0) \geq 0$, $\varphi(1)\varphi'(1) \leq 0$.

Αν $\varphi(0)\varphi'(0) \neq 0$ τότε αφού $\alpha\varphi(0) + \alpha'\varphi'(0) = 0$

$\Rightarrow \varphi'(0) = -\frac{\alpha}{\alpha'}\varphi(0) \Rightarrow \varphi(0)\varphi'(0) = -\frac{\alpha}{\alpha'}\varphi(0)^2$

$\Rightarrow$ πρέπει α, α' ετερόσημα

Ανάλογα πρέπει β, β' ομόσημα

Γενικά αν $\alpha\alpha' \leq 0$ και $\beta\beta' \geq 0$ τότε $\lambda_n \longrightarrow +\infty$

Άσκηση 10: Έστω P και Q ορθογώνιες προβολές πάνω στους κλειστούς υποχώρους M και N αντίστοιχα. Να δειχθεί ότι τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:

(i) $\langle Px, x\rangle \leq \langle Qx, x\rangle$, $x \in \mathcal{H}$

(ii) $\|Px\| \leq \|Qx\|$, $x \in \mathcal{H}$

(iii) $PQ = QP = P$

(iv) $M \subset N$

Παρατήρηση: Αν $A, B \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ αυτοσυζυγής τότε γράφουμε $A \leq B$ αν $\langle Ax, x\rangle \leq \langle Bx, x\rangle$, $\forall x \in \mathcal{H}$.

Λύση: (i) $\Leftrightarrow$ (ii) $\|Px\|^2 = \langle Px, Px\rangle = \langle P^2x, x\rangle = \langle Px, x\rangle$

$\|Qx\|^2 = \langle Qx, Qx\rangle = \langle Q^2x, x\rangle = \langle Qx, x\rangle$

άρα αν ισχύει η μια ισχύει ισοδύναμα και η άλλη απο τις (i),(ii)

• (iii) $\Rightarrow$ (iv) Έστω $x \in M$. τότε

Τότε $x = Px = QPx \in N$

(iv) $\Rightarrow$ (iii) Έστω $x \in \mathcal{H}$ τότε

$Px \underset{M\subset N}{=} QPx$. Άρα $P = QP$, άρα $P = P^* = (QP)^* = P^*Q^* = PQ$

(iii) ⟹ (ii) Έστω $x \in \mathcal{H}$ τότε

$$\|Px\| = \|PQx\| \leq \|P\| \cdot \|Qx\| \leq \|Qx\|$$ η νόρμα της προβολής είναι ΟΚ

(ii) ⟹ (iv) Έστω $x \in M$. Γράφουμε $Px = x = \underbrace{Qx}_{N} + \underbrace{(I-Q)x}_{N^{\perp}}$

Άρα $\|Qx\|^2 \geq \|Px\|^2 = \|Qx\|^2 + \|x-Qx\|^2 \Rightarrow 0 \geq \|x-Qx\|^2 \Rightarrow$

$Qx = x \in N$

Άσκηση 12: Έστω $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ τέτοιος ώστε $T^2 = T$. Να δειχθεί ότι $\sigma(T) \subset \{0,1\}$

Λύση:

Έστω $z \notin \{0,1\}$ θα δείξουμε ότι $z \in \rho(T)$

Θα αναζητήσουμε τον $(T-z)^{-1}$ στη μορφή $\alpha I + \beta T$

Έχουμε $(\alpha + \beta T)(T - z) = -\alpha z + (\alpha - \beta z)T + \beta T^2 = -\alpha z + (\alpha + \beta - \beta z)T \overset{\text{θέλουμε}}{=} I$

Άρα θέλουμε $\begin{cases} -\alpha z = 1 & \rightarrow \quad \alpha = -\frac{1}{z} \\ \alpha + \beta - \beta z = 0 & \rightarrow \quad \beta = \frac{1}{z(z-1)} \end{cases}$

Άρα αν $z \neq 0, 1$ τότε $T - z$ αντιστρέψιμος και

$$(T-z)^{-1} = -\frac{1}{z} + \frac{1}{z(z-1)} T$$