Μάθημα 12ο — Εφαρμοσμένη Συναρτησιακή Ανάλυση — 3/4/2019

Παρατήρηση: Έστω $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ και $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ ορθοκανονική βάση του $\mathcal{H}$

Έστω $x \in \mathcal{H}$, $y = Tx$ τότε:

$x = \sum_{n=1}^{\infty} x_n e_n \qquad (x_n = \langle x, e_n \rangle)$

Όμως $y = \sum_{n=1}^{\infty} y_n e_n$, $\quad Tx = \sum_{n=1}^{\infty} x_n Te_n = \sum_{n=1}^{\infty} x_n \sum_{k=1}^{\infty} \langle Te_n, e_k \rangle e_k$
$= \sum_{k=1}^{\infty} \left[\sum_{n=1}^{\infty} x_n \langle Te_n, e_k \rangle \right] e_k$

Άρα $y_k = \sum_{n=1}^{\infty} x_n \langle Te_n, e_k \rangle$

Ορισμός: Ο άπειρος πίνακας $a_{ij} = \langle Te_j, e_i \rangle$ ονομάζεται πίνακας του T ως προς τη βάση $\{e_n\}$

Άρα $y_i = \sum_{j=1}^{\infty} a_{ij} x_j$

Παρατήρηση: Δεδομένου του τελεστή T θα συμβολίζουμε με $\{\lambda_n\}$ τις επαναλαμβανόμενες ιδιοτιμές και με $\{\mu_n\}$ τις διακριτές ιδιοτιμές.

π.χ Έστω για $\dim(\mathcal{H}) = 3$ τελεστής T για τον οποίο υπάρχει βάση $\{e_1, e_2, e_3\}$ από ιδιοδιανύσματα και

$Te_1 = 3e_1$

$Te_2 = 4e_2$ τότε $\lambda_1 = 3$, $\lambda_2 = \lambda_3 = 4$

$Te_3 = 4e_3$ $\qquad \mu_1 = 3 \quad \mu_2 = 4$

Θεώρημα: (Φασματικό Θεώρημα για συμπαγείς αυτοσυζυγείς τελεστές)

Έστω $\mathcal{H}$ χώρος Hilbert με $\dim(\mathcal{H}) = \infty$ και T αυτοσυζυγής και συμπαγής

Διατύπωση 1: Υπάρχει μια ορθοκανονική βάση $\{e_n\}$ του $\mathcal{H}$ που αποτελείται από ιδιοδιανύσματα του T

Διατύπωση 2: Υπάρχει μια ορθοκανονική βάση $\{e_n\}$ του $\mathcal{H}$ που αποτελείται από ιδιοδιανύσματα του T. Αν η βάση αυτή γραφεί ως $\{e_n\} = \{\varphi_n\} \cup \{\psi_n\}$ όπου τα $\{\varphi_n\}$ αντιστοιχούν σε μη-μηδενικές ιδιοτιμές και τα $\{\psi_n\} \in \mathrm{Ker}(T)$ και $T\varphi_n = \lambda_n \varphi_n$ όπου διατάσσουμε τα $\{\lambda_n\}$ ώστε $|\lambda_1| \geq |\lambda_2| \geq \dots$

Τότε η ακολουθία $\{\lambda_n\}$ είτε είναι πεπερασμένη είτε τείνει στο 0 και $T = \sum_n \lambda_n \varphi_n \otimes \varphi_n \quad ((\varphi_n \otimes \varphi_n)x = \langle x, \varphi_n \rangle \varphi_n)$ (σύγκλιση κατά νόρμα), δηλαδή $Tx = \sum_n \lambda_n \langle x, \varphi_n \rangle \varphi_n$

Διατύπωση 3: Υπάρχει μια ορθοκανονική βάση $\{e_n\}$ του $\mathcal{H}$ που αποτελείται από ιδιοδιανύσματα του T. Έστω $Te_n = \mu_n e_n$ τότε $\mu_n \to 0$ και $T = \sum_{n=1}^{\infty} \mu_n e_n \otimes e_n$ (σύγκλιση κατά νόρμα)

Παρατήρηση: Στη διατύπωση 3 ο πίνακας του T ως προς τη βάση $\{e_n\}$ έχει στοιχεία:

$$\alpha_{ij} = \langle Te_j, e_i\rangle = \langle \mu_j e_j, e_i\rangle = \mu_j \delta_{ij}\text{, Άρα } \begin{bmatrix} \mu_1 & & 0 \\ & \mu_2 & \\ 0 & & \mu_3 \\ & & & \ddots \end{bmatrix}$$

Στη διατύπωση 2 ο πίνακας είναι $\left[\begin{array}{ccc|c} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & 0 \\ & & \ddots & \\ \hline & 0 & & 0 \end{array}\right]$

Απόδειξη: (Διατύπωση 2)

Έστω $\mathcal{H}_1 = \mathcal{H}$, $T_1 = T$ και υποθέτουμε $T \neq 0$

Από το τελευταίο λήμμα ο T_1 έχει ιδιοτιμή $\lambda_1 = \|T_1\|$ ή $\lambda_1 = -\|T_1\|$

Έστω φ_1 αντίστοιχο ιδιοδιάνυσμα με $\|\varphi_1\| = 1$.

Ο T_1 ανάγει τον $\langle\varphi_1\rangle$. ($T_1\varphi_1 = \lambda_1\varphi_1 \in \langle\varphi_1\rangle$)

Θέτουμε $\mathcal{H}_2 = \langle\varphi_1\rangle^{\perp}$ Άρα $\mathcal{H} = \langle\varphi_1\rangle \oplus \mathcal{H}_2$ (⊛) Έστω $T_2 = T|_{\mathcal{H}_2}$, τότε $T_2 \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$

Άρα ως προς την ανάλυση (⊛) έχουμε $T = \lambda_1 \oplus T_2$

Αν $T_2 = 0$ σταματάμε εδώ

Αν $T_2 \neq 0$ τότε ένα από τα $\pm\|T_2\|$ είναι μια ιδιοτιμή του T_2

$T_2\varphi_2 = \lambda_2\varphi_2 \quad \|\varphi_2\| = 1$

Ορίζουμε $\mathcal{H}_3 = \langle\varphi_2\rangle^{\perp_{\mathcal{H}_2}} = \langle\varphi_1, \varphi_2\rangle^{\perp}$ οπότε

$\mathcal{H} = \langle\varphi_1\rangle \oplus \langle\varphi_2\rangle \oplus \mathcal{H}_3 \quad (**)$

Ο $\mathcal{H}_3$ είναι αναλλοίωτος από τον T, άρα ορίζεται ο

$T_3 = T_2|_{\mathcal{H}_3} \in \mathcal{B}(\mathcal{H}_3)$

Ως προς την ανάλυση $(**)$ έχουμε τότε $T = \lambda_1 \oplus \lambda_2 \oplus T_3$

και ου το καθεξής.

Μετά από n βήματα έχουμε ιδιοδιανύσματα

$\varphi_1, \dots, \varphi_n$ με $\langle\varphi_n, \varphi_m\rangle = \delta_{nm}$ και $T\varphi_n = \lambda_n\varphi_n$

ισχύει $|\lambda_{k+1}| = \|T_{k+1}\| = \|T_k|_{\mathcal{H}_{k+1}}\| \le \|T_k\| = |\lambda_k|$

Αν $\mathcal{H}_{n+1} = \langle\varphi_n\rangle^{\perp_{\mathcal{H}_n}} = \langle\varphi_1, \dots, \varphi_n\rangle^{\perp}$

Τότε ο $T_{n+1} = T_n|_{\mathcal{H}_{n+1}} = T|_{\mathcal{H}_{n+1}}$

αφήνει αναλλοίωτο τον $\mathcal{H}_{n+1}$ και ως προς την ανάλυση

$\mathcal{H} = \langle\varphi_1\rangle \oplus \dots \oplus \langle\varphi_n\rangle \oplus \mathcal{H}_{n+1}$ έχουμε

$T = \lambda_1 \oplus \dots \oplus \lambda_n \oplus T_{n+1}$

(i) Υπάρχει $n \in \mathbb{N}$ τ.ω $T_{n+1} = 0$ τότε $\mathcal{H}_{n+1} = Ker(T)$ και έχουμε

$\mathcal{H} = \langle\varphi_1\rangle \oplus \dots \oplus \langle\varphi_n\rangle \oplus Ker(T)$ και

$T = \lambda_1 \oplus \dots \oplus \lambda_n \oplus 0$

Ειδικότερα $T = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k \varphi_k \otimes \varphi_k$

Αν $\{\psi_n\}$ είναι μια ορθοκανονική βάση του $Ker(T)$ τότε το σύνολο

$\{\varphi_1, \dots, \varphi_n\} \cup \{\psi_k\}_{k=1}^{\infty}$ είναι μια ορθοκανονική βάση του $\mathcal{H}$

(ii) $T_{n+1} \neq 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$

Άρα η (λ_n) είναι άπειρη ακολουθία που φθίνει κατά απόλυτη τιμή.

Ισχυρισμός $\lambda_n \longrightarrow 0$

Έστω πως $\lambda_n \not\to 0$ τότε $\exists\, \varepsilon > 0$ τ.ω $|\lambda_n| \geq \varepsilon$, $n \in \mathbb{N}$

Τότε για $n \neq m$ $\|T\varphi_n - T\varphi_m\|^2 = \|\lambda_n\varphi_n - \lambda_m\varphi_m\|^2 = \lambda_n^2 + \lambda_m^2 \geq 2\varepsilon^2$

Άρα η $(T\varphi_n)$ δεν έχει Cauchy υπακολουθία. Άτοπο

Θα δείξουμε ότι

$$T = \sum_{m=1}^{\infty} \lambda_m \varphi_m \otimes \varphi_m$$

Έστω $T_r = \sum_{m=1}^{r-1} \lambda_m \varphi_m \otimes \varphi_m$ Έστω $x \in \mathcal{H}$

Έστω $x_r = x - \sum_{m=1}^{r-1} \langle x, \varphi_m\rangle \varphi_m$ = η ορθογώνια προβολή του x στο $\langle\varphi_1, \dots, \varphi_n\rangle^{\perp} \in \mathcal{H}_r$

Τότε

$\|Tx - T_r x\| = \|Tx_r + T(\sum_{m=1}^{r-1} \langle x, \varphi_m\rangle\varphi_m) - \sum_{m=1}^{r-1} \lambda_m(\varphi_m \otimes \varphi_m)x\| = \|Tx_r\| = \|T_r x_r\|$

$\Rightarrow \|Tx - T_r x\| \leq \|T_r\| = |\lambda_r|\,\|x_r\| \leq |\lambda_r|\,\|x\|$

Άρα $\|T - T_r\| \leq |\lambda_r| \xrightarrow[r\to\infty]{} 0$

Άρα $T = \sum_{m=1}^{\infty} \lambda_m \varphi_m \otimes \varphi_m$

Έστω $\{\psi_n\}$ ορθοκανονική βάση του $Ker(T)$

Έστω $x \in \mathcal{H}$ και έστω

$y = x - \sum_{m=1}^{\infty} \langle x, \varphi_m\rangle \varphi_m$. Τότε $Ty = 0$ δηλαδή $y \in Ker(T)$

άρα $y = \sum_k \langle y, \psi_k\rangle \psi_k = \sum_k \langle x, \psi_k\rangle \psi_k$

Άρα $x = \sum_{n=1}^{\infty} \langle x, \varphi_n \rangle \varphi_n + \sum_{k} \langle x, \psi_k \rangle \psi_k$

Άρα η $\{\varphi_n\} \cup \{\psi_k\}$ είναι ορθοκανονική βάση του $\mathcal{H}$

Παρατήρηση: Έστω $\{v\}_n$ οι διακριτές του T (άρα $v_n \neq v_m$)
Έστω P_n η ορθογώνια προβολή στον ιδιοχώρο της v_n, τότε
$T = \sum_{n} v_n P_n$