Μάθημα 9ο: ΕΣ. Εφαρμοσμένη Συναρτησιακή Ανάλυση 20/3/2019

Άσκηση 3. Στον $L^2(-1,1)$ θεωρούμε τους κλειστούς υπόχωρους

$$L^2_\alpha = \{ f \in L^2(-1,1) : f(-t) = f(t) \text{ σ.π} \}$$

$$L^2_n = \{ f \in L^2(-1,1) : f(-t) = -f(t) \text{ σ.π} \}$$

Να δειχθεί ότι $L^2(-1,1) = L^2_\alpha \oplus L^2_n$

Λύση:

Ύπαρξη: $$f(t) = \overbrace{\frac{f(t)+f(-t)}{2}}^{\in L^2_\alpha} + \overbrace{\frac{f(t)-f(-t)}{2}}^{\in L^2_n}$$

Μοναδικότητα: $f(t) = f_\alpha(t) + f_n(t)$

$$f(-t) = f_\alpha(-t) + f_n(-t) = f_\alpha(t) - f_n(-t)$$

$$\Rightarrow f_\alpha(t) = \frac{f(t)+f(-t)}{2}, \quad f_n(t) = \frac{f(t)-f(-t)}{2}$$

άλλος τρόπος: Ισχύει $L^2_n = L^{2\perp}_\alpha$. είναι άμεσο ότι $L^2_n \perp L^2_\alpha$

δηλαδή $L^2_n \subset (L^2_\alpha)^\perp$

Έστω $f \in (L^2_\alpha)^\perp$ θα δείξουμε ότι $f \in L^2_n$ τότε $\forall g \in L^2_\alpha$ έχουμε

$$0 = \langle f, g\rangle = \int_{-1}^1 f(t)\overline{g(t)}\,dt = \int_{-1}^0 f(t)\overline{g(t)}\,dt + \int_0^1 f(t)\overline{g(t)}\,dt =$$

$$= \int_0^1 f(-t)\overline{g(-t)}\,dt + \int_0^1 f(t)\overline{g(t)}\,dt \overset{\text{άρτια}}{=} \int_0^1 (f(t)+f(-t))\overline{g(t)}\,dt =$$

$$= \langle f(t)+f(-t), g\rangle_{L^2(0,1)}$$

Άρα $f(t)+f(-t)\big|_{(0,1)} \in L^2(0,1) = \{0\}$, άρα $f(t)+(-t)=0$ στο $(0,1)$

άρα περιττή

Άσκηση 7: Να δειχθεί ότι ο τελεστής A στον $L^2(0,1)$ όπου

$$(Af)(x) = \int_0^x f(t)/\sqrt{x-t}\,dt$$ είναι φραγμένος.

Λύση:

Έχουμε $$\|Af\|^2 = \int_0^1 |Af(x)|^2 dx = \int_0^1 \left|\int_0^x \frac{f(t)}{\sqrt{x-t}}\,dt\right|^2 dx$$

$$\le \int_0^1 \left(\int_0^x \frac{|f(t)|^2}{\sqrt{x-t}}\,dt\right)\left(\int_0^x \frac{dt}{\sqrt{x-t}}\right) dx$$

Έχουμε $$\int_0^x (x-t)^{-\frac12}\,dt = -2(x-t)^{1/2}\Big|_{t=0}^{t=x} = 2\sqrt{x} \le 2$$

$$\Rightarrow \|Af\|^2 \le 2\int_0^1\int_0^x \frac{|f(t)|^2}{\sqrt{x-t}}\,dt\,dx$$

$$\le 2\int_0^1\int_t^1 \frac{|f(t)|^2}{\sqrt{x-t}}\,dx\,dt = 2\int_0^1 |f(t)|^2\left(\int_t^1 \frac{dx}{\sqrt{x-t}}\right)dt$$

$$\int_t^1 (x-t)^{-\frac{1}{2}}dx = 2(x-t)^{1/2}\Big|_t^1 = 2(1-t)^{1/2} \le 2$$

$$\Rightarrow \|Af\| \le 4\int_0^1 |f(t)|^2 dt = 4\|f\|^2$$

Πρόταση: Ισχύει $\sigma(T^*) = \overline{\sigma(T)} = \{\bar{z} : z \in \sigma(T)\}$

Άσκηση: Στον $L^2(\Omega)$ έστω $(Tf)(x) = \int_\Omega k(x,y)f(y)dy$.
Τότε ο T^* είναι επίσης ολοκληρωτικός τελεστής με πυρήνα $K^*(x,y) = \overline{k(y,x)}$. Ειδικότερα T αυτοσυζυγής αν και μόνο αν $k(x,y) = \overline{k(y,x)}$

Παραδείγματα:

1) Αν $\dim \mathcal{H} = \infty$ τότε ο ταυτοτικός τελεστής I δεν είναι συμπαγής.
Έστω $(e_n)_{n=1}^\infty$ ορθοκανονική βάση. Τότε η (e_n) δεν έχει συγκλίνουσα υπακολουθία, αφού $\|e_n - e_m\|^2 = 2$, $n \neq m$

2) Αν ο T είναι φραγμένος πεπερασμένης τάξης, δηλαδή $\dim(Ran(T)) < \infty$, τότε είναι συμπαγής.

Άσκηση: Να δειχθεί ότι αν $\dim(Ran(T)) = n$, τότε υπάρχουν $y_1,\dots,y_n \in \mathcal{H}$ και $v_1,\dots,v_n \in \mathcal{H}$ τέτοια ώστε
$Tx = \langle x, y_1\rangle v_1 + \dots + \langle x, y_n\rangle v_n$
Γράφουμε $T = y_1 \otimes v_1 + \dots + y_n \otimes v_n$

3) Μια ορθογώνια προβολή P είναι συμπαγής αν και μόνο αν $\dim(Ran(P)) < +\infty$

Συμβολισμός: $\mathcal{C}(\mathcal{H}, \mathcal{F}) = \{T : \mathcal{H} \to \mathcal{F},\ T \text{ συμπαγής}\}$

ΕΣ. Εφαρμοσμένη Συναρτησιακή Ανάλυση 20/3/2019

Πρόταση: Ο $\mathcal{C}(\mathcal{H})$ είναι υπόχωρος του $\mathcal{B}(\mathcal{H})$. Επιπλέον, αν $T \in \mathcal{C}(\mathcal{H})$, $S \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ τότε TS, ST συμπαγείς
(δηλ το $\mathcal{C}(\mathcal{H})$ είναι ιδεώδες του $\mathcal{B}(\mathcal{H})$)

Απόδειξη:

Είναι άμεσο ότι αν T συμπαγής και $\lambda \in \mathbb{C}$ τότε λT συμπαγής.
Έστω T_1, T_2 συμπαγείς.
Έστω $(x_n) \subset \mathcal{H}$ φραγμένη Τότε η $(T_1 x_n)_n$ έχει συγκλίνουσα υπακολουθία $(T_1 x_{n_k})_k$
Η $(T_2 x_{n_k})$ έχει συγκλίνουσα υπακολουθία $(T_2 x_{n_{k_i}})_i$, Τότε η $(T_1 + T_2) x_{n_{k_i}}$ συγκλίνει Άρα $T_1 + T_2$ συμπαγής.
Έστω T συμπαγής, S φραγμένος.
Έστω $(x_n) \subset \mathcal{H}$ φραγμένη
Τότε η $(T x_n)$ έχει συγκλίνουσα υπακολουθία $(T x_{n_k})$ Άρα $(ST x_{n_k})$ συγκλίνει Άρα ST συμπαγής.
Αφού (x_n) φραγμένη και η $(S x_n)$ φραγμένη. Άρα η $(TS x_n)$ έχει συγκλίνουσα υπακολουθία. Άρα TS συμπαγής

Παρατήρηση: Το ίδιο ισχύει αν έχουμε περισσότερους χώρους Hilbert $\mathcal{H} \to \mathcal{F} \to \mathcal{K}$

Θεώρημα: Ο $\mathcal{C}(\mathcal{H})$ είναι κλειστός υπόχωρος του $\mathcal{B}(\mathcal{H})$

Απόδειξη:

Έστω $(T_n) \subset \mathcal{C}(\mathcal{H})$ και $T_n \to T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$. Θα δείξω ότι ο T συμπαγής
Έστω $(x_n) \subset \mathcal{H}$ φραγμένη χωρίς βλάβη της γενικότητας, υποθέτουμε $\|x_n\| \leq 1$
Η $(T_1 x_n)$ έχει συγκλίνουσα υπακολουθία $(T_1 x_{n_{1,k}})_k$
Η $(T_2 x_{n_{1,k}})$ έχει συγκλίνουσα υπακολουθία $(T_2 x_{n_{2,k}})_k$
Συνεχίζουμε έτσι Για κάθε $i \in \mathbb{N}$ ορίζεται ακολουθία $(x_{n_{i,k}})_k$ τέτοια ώστε $(x_{n_{i,k}})_k$ υπακολουθία της $(x_{n_{i-1,k}})_k$ $(T_i x_{n_{i,k}})_k$ συγκλίνει
Άρα η $(T_j x_{n_{i,k}})_k$ συγκλίνει $\forall j \leq i$. Θέτουμε $y_k = x_{n_{k,k}}$

$$
\begin{array}{cccc}
y_k & 1 & 2 & 3 \quad \dots \\
 & x_{n_1,1} & x_{n_2,1} & x_{n_3,1} \\
 & x_{n_1,2} & x_{n_2,2} & x_{n_3,2} \\
 & x_{n_1,3} & x_{n_2,3} & x_{n_3,3}
\end{array}
$$

Η (y_n) είναι τελικά υπακολουθία κάθε $(x_{n_i,n})_n$. Άρα $\forall\, i \in \mathbb{N}$ η $(T_i y_k)_k$ συγκλίνει

Θα δείξουμε ότι η (Ty_k) είναι Cauchy

Έστω $\varepsilon > 0$ Υπάρχει $i \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε $\|T_i - T\| < \varepsilon/3$

Η $(T_i y_n)_n$ είναι Cauchy άρα $\exists\, N \in \mathbb{N}$ τέτοια ώστε $n, m \geq N$

$\Rightarrow \|T_i y_n - T_i y_m\| < \varepsilon/3$

Άρα για $n, m \geq N$

$$\|Ty_n - Ty_m\| \leq \|Ty_n - T_i y_n\| + \|T_i y_n - T_i y_m\| + \|T_i y_m - Ty_m\|$$

$$\leq \|T_i - T\| \cdot \|y_n\| + \varepsilon/3 + \|T_i - T\| \, \|y_m\| \leq \varepsilon/3 + \varepsilon/3 + \varepsilon/3 = \varepsilon$$