Μάθημα 1ο Ε6. Εφαρμοσμένη Συναρτησιακή Ανάλυση 18/02/2019

Βιβλιογραφία: • Brezis: Functional Analysis, Sobolev Spaces & PDEs
• Kreyszig: Introductory Functional Analysis & Applications

Χώροι Hilbert

Ορισμός: Ονομάζουμε χώρο εσωτερικού γινομένου, έναν γραμμικό χώρο X (πάνω στο $\mathbb{C}$) εφοδιασμένο με μια απεικόνιση $\langle\cdot,\cdot\rangle : X\times X \longrightarrow \mathbb{C}$ για την οποία:

(i) $\langle \lambda x+\mu y, z\rangle = \lambda\langle x,z\rangle + \mu\langle y,z\rangle$, $\lambda,\mu\in\mathbb{C}$, $x,y,z\in X$

(ii) $\langle y,x\rangle = \overline{\langle x,y\rangle}$

(iii) $\langle x,x\rangle \geqslant 0$ $\forall x\in X$ και είναι ίσο με 0 ανν $x=0$.

Συνέπειες του ορισμού:

(iv) $\langle x,\lambda y+\mu z\rangle = \bar{\lambda}\langle x,y\rangle + \bar{\mu}\langle x,z\rangle$ (ημιγραμμικότητα)

(v) $\langle 0,x\rangle = \langle x,0\rangle = 0$

Παραδείγματα:

1. Το $\mathbb{C}^n$ είναι χώρος εσωτερικού γινομένου με το εσωτερικό γινόμενο $\langle x,y\rangle = \sum_{k=1}^{n} x_k\bar{y}_k$ $x=(x_1,\dots,x_n)$, $y=(y_1,\dots,y_n)$

2. Ο χώρος $\ell^2 = \left\{ x=(x_n)_{n=1}^{\infty} : \sum_{n=1}^{\infty}|x_n|^2 < +\infty \right\}$ είναι χώρος εσωτερικού γινομένου με το $\langle x,y\rangle = \sum_{n=1}^{\infty} x_n\bar{y}_n$ (συγκλίνει λόγω της $|x_n\bar{y}_n| \leq \frac{1}{2}(|x_n|^2+|y_n|^2)$)

3. (i) Ο χώρος $C([\alpha,b])$ είναι χώρος εσωτερικού γινομένου ως προς το $\langle f,g\rangle = \int_{\alpha}^{b} f(t)\,\overline{g(t)}\,dt$

(ii) γενικότερα αν $\Omega\subseteq\mathbb{R}^n$ φραγμένο, ανοικτό τότε ο $C(\overline{\Omega})$ είναι χώρος εσωτερικού γινομένου ως προς το $\langle f,g\rangle = \int_{\Omega} f(x)\overline{g(x)}\,dx$

Πρόταση: (Ανισότητα Cauchy - Schwarz)

$$|\langle x,y\rangle|^2 \leq \langle x,x\rangle\langle y,y\rangle \qquad x,y\in X$$

Απόδειξη:

Υποθέτουμε ότι $\langle x,y\rangle \neq 0$. Γράφουμε $\langle x,y\rangle = R\cdot e^{i\theta}$

Έστω $r\in\mathbb{R}$, θέτουμε $\lambda = r\cdot e^{i\theta}$. Τότε

$$\begin{aligned}
0 &\leq \langle x+\lambda y, x+\lambda y\rangle \\
&= \langle x,x\rangle + \bar{\lambda}\langle x,y\rangle + \lambda\langle y,x\rangle + |\lambda|^2\langle y,y\rangle \\
&= \langle x,x\rangle + r\cdot e^{-i\theta}\cdot R e^{i\theta} + r\cdot e^{i\theta}\cdot R\cdot e^{-i\theta} + r^2\langle y,y\rangle \\
&= \langle y,y\rangle r^2 + 2|\langle x,y\rangle| r + \langle x,x\rangle
\end{aligned}$$

Άρα $\Delta \leq 0 \Rightarrow 4\cdot|\langle x,y\rangle|^2 - 4\langle y,y\rangle\langle x,x\rangle \leq 0 \Rightarrow |\langle x,y\rangle|^2 \leq \langle x,x\rangle\langle y,y\rangle$

Πρόταση: Η απεικόνιση $\|x\| = \langle x,x\rangle^{1/2}$ είναι νόρμα στον X

Απόδειξη:

Δείχνουμε μόνο την τριγωνική ανισότητα.

Έχουμε
$$\begin{aligned}
\|x+y\|^2 = \langle x+y, x+y\rangle &= \langle x,x\rangle + \langle x,y\rangle + \langle y,x\rangle + \langle y,y\rangle \\
&\leq \langle x,x\rangle + 2|\langle x,y\rangle| + \langle y,y\rangle \overset{CS}{\leq} \langle x,x\rangle + 2\langle x,x\rangle^{1/2}\langle y,y\rangle^{1/2} + \langle y,y\rangle \\
&= (\langle x,x\rangle^{1/2} + \langle y,y\rangle^{1/2})^2 = (\|x\| + \|y\|)^2
\end{aligned}$$

Άρα κάθε χώρος εσωτερικού γινομένου είναι νορμικός χώρος.

Παρατηρήσεις

(i) Η ανισότητα Cauchy - Schwarz γράφεται:

$$|\langle x,y\rangle| \leq \|x\|\,\|y\|$$

(ii) Έχουμε

$$\|x\pm y\|^2 = \|x\|^2 \pm 2\,\mathrm{Re}\langle x,y\rangle + \|y\|^2$$

Πρόταση: (Κανόνας παραλληλογράμμου)

Σε κάθε χώρο εσωτερικού γινομένου ισχύει:

$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2, \quad x,y\in X$$

Ε6. Εφαρμοσμένη Συναρτησιακή Ανάλυση 18/02/2019

Πρόταση: (Πολική Ταυτότητα)
Για κάθε $x,y \in X$

$$\langle x,y\rangle = \frac{1}{4}\left[\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2 + i\|x+iy\|^2 - i\|x-iy\|^2\right] \qquad (*)$$

Απόδειξη:
Πράξεις

Παρατήρηση: Αποδεικνύεται ότι μια νόρμα είναι νόρμα που επάγεται από κάποιο εσωτερικό γινόμενο ανν ικανοποιείται ο κανόνας του παραλληλογράμμου.
[κανόνας παραλληλογράμμου $\Longrightarrow$ Το $(*)$ είναι εσωτερικό γινόμενο]

Ορισμός: Ένας πλήρης χώρος εσωτερικού γινομένου ονομάζεται χώρος Hilbert.

Παρατήρηση: Κάθε χώρος εσωτερικού γινομένου πεπερασμένης διάστασης είναι χώρος Hilbert.

Πρόταση: Ο χώρος ℓ^2 είναι διαχωρίσιμος χώρος Hilbert.
Απόδειξη: (i) πληρότητα
Έστω (α_n) ακολουθία Cauchy στον ℓ^2, $\alpha_n = (\alpha_{n1}, \alpha_{n2}, \dots)$

$$\left.\begin{array}{l} \alpha_1 = (\alpha_{11}, \alpha_{12}, \dots, \alpha_{1j}, \dots) \\ \alpha_2 = (\alpha_{21}, \alpha_{22}, \dots, \alpha_{2j}, \dots) \\ \\ \qquad\ (b_1, b_2, \dots, b_j, \dots) \end{array}\right\} \text{Ιδέα της απόδειξης}$$

Έστω $j \in \mathbb{N}$ τότε για $m,n \in \mathbb{N}$, $|\alpha_{nj} - \alpha_{mj}| \le \left(\sum_{k=1}^{\infty} |\alpha_{nk} - \alpha_{mk}|^2\right)^{1/2} = \|\alpha_n - \alpha_m\|$

Άρα η $(\alpha_{nj})_n$ είναι Cauchy στο $\mathbb{C}$
Έστω $b_j = \lim_n \alpha_{nj}$
Θέτουμε $b = (b_1, b_2, \dots)$

Αφού η (α_n) είναι Cauchy, είναι και φραγμένη
$\exists\ M>0$ τ.ω. $\|\alpha_n\| \leq M \quad \forall\ n \in \mathbb{N}$
Έστω $k \in \mathbb{N}$, τότε $\sum_{j=1}^{k} |b_j|^2 = \lim_n \sum_{j=1}^{k} |\alpha_{nj}|^2 \leq \lim_n \|\alpha_n\| \leq M$
άρα παίρνοντας $k \to \infty$ έχουμε ότι $b \in \ell^2$

Έστω $\varepsilon > 0$. Υπάρχει $N \in \mathbb{N}$ τ.ω. αν $n,m > N$ τότε $\|\alpha_n - \alpha_m\| < \varepsilon$
Έστω $k \in \mathbb{N}$ τότε $\sum_{j=1}^{k} |\alpha_{nj} - \alpha_{mj}|^2 \leq \|\alpha_n - \alpha_m\|^2 < \varepsilon^2$
Παίρνουμε όριο $m \to \infty$
$\sum_{j=1}^{k} |\alpha_{nj} - b_j|^2 \leq \varepsilon^2 \quad \forall\ n > N$

Άρα $(k \to \infty)$ $\left(\sum_{j=1}^{\infty} |\alpha_{nj} - b_j|^2\right)^{1/2} \leq \varepsilon$ άρα $\|\alpha_n - b\| \leq \varepsilon\ \forall\ n > N$, άρα $\alpha_n \to b$ στον ℓ^2

(ii) διαχωρισιμότητα
Για $n \in \mathbb{N}$ ορίζουμε $A_n = \{(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n, 0, \ldots) : \alpha_k \in \mathbb{Q} + i\mathbb{Q}\}$
κάθε A_n είναι αριθμήσιμο
Άρα το $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ είναι αριθμήσιμο. Θα δείξουμε ότι το A πυκνό.
Έστω $b \in \ell^2$ και $\varepsilon > 0$
Υπάρχει N τ.ω. $\sum_{i=N}^{\infty} |b_i|^2 < \varepsilon^2/2$
Επίσης για κάθε $i = 1, \ldots, N$ υπάρχει $\alpha_i \in \mathbb{Q} + i\mathbb{Q}$ τ.ω. $|\alpha_i - b_i| < \varepsilon/\sqrt{2N}$
Θέτουμε $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_N, 0, 0, \ldots)$ τότε $\alpha \in A$. Επίσης.
$\|\alpha - b\|^2 = \sum_{i=1}^{N} |\alpha_i - b_i|^2 + \sum_{i=N+1}^{\infty} |b_i|^2 \leq \frac{N \cdot \varepsilon^2}{2N} + \frac{\varepsilon^2}{2} = \varepsilon^2 \implies \|\alpha - b\| < \varepsilon$